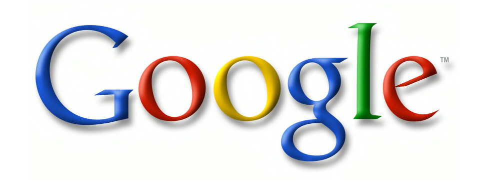

Google




TAYLOR INSTITUTION
DOMI NUS ILLU MINA TIO MEA

ŒUVRES

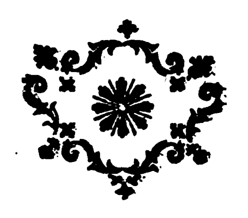
DE

M. DIDEROT.

ŒUVRES
PHILOSOPHIQUES
ET DRAMATIQUES
DE M. DIDEROT.

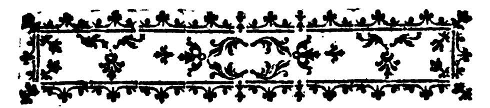
TOME SIXIEME,

CONTENANT des Mémoires sur différens sujets de Mathématiques.



A AMSTERDAM.

M. DCC. LXXII.



A MADAME

*DE P****

MADAME,

Je n'opposerai point à vos reproches l'exemple de Rabelais, de Montagne, de la Mothe-le-Vayer, de Swift, & de quelques autres que je pourrois nommer,

qui ont attaqué de la maniere la plus cynique les ridicules de leur temps, & conservé le titre de Sages.

Je veux que le scandale cesse, & sans perdre le temps en apologie, j'abandonne la marotte & les grelots, pour ne les reprendre jamais, & je reviens à Socrate.

Sachez cependant qu'entre tous les avantages qu'il vous a plu d'attacher à ce retour, celui de vous en consacrer les premiers fruits est le seul

qui m'ait flatté. J'ai pensé qu'ils ne seroient pas indignes du Public, s'ils étoient dignes de vous.

Puissiez-vous donc les agréer, & voir avec indulgence votre nom à la tête d'un Ouvrage, triste à la vérité, mais où l'on traite des sujets qui vous sont familiers, & d'une façon qui ne vous est pas tout-à-fait étrangere.

Ce n'est, MADAME, ni à votre esprit ni à vos

charmes ; mais c'est seulement à vos talens & à vos connoissances que je me suis proposé de rendre hommage pour cette fois.

J'ai l'honneur d'être avec un profond respect,

MADAME,

Votre très-humble & très-obéissant Serviteur,
DIDEROT.



AVERTISSEMENT.

LES Mémoires que je présente au Public, en très-petit nombre, sont presque tous sur des sujets intéressans. J'ai désiré de les traiter d'une façon qui fût à la portée de la plupart des Lecteurs; mais après quelques efforts inutiles, il en a fallu venir aux calculs, & il ne m'est resté d'autre

ressource que de placer mes x & mes y, de maniere que ceux qui n'ont aucune connoissance de l'Algebre, pussent les omettre, sans que ni le fil ni la clarté du discours en souffrissent. C'est ce que j'ai exécuté assez heureusement dans le premier Mémoire. La chose étoit impossible dans le second. On peut lire, sans presqu'aucune teinture de Mathématique, le troisieme & le quatrieme. Le cin-

quieme s'eſt trouvé dans le cas du ſecond. Je n'aurois point eu cet Avertiſſement à faire, ſi les Perſonnes entre les mains de qui ce Livre pourra tomber, étoient toutes auſſi inſtruites que celle qui m'a permis de le lui dédier : ſes Ouvrages prouveront inceſſamment, que l'éloge que je fais ici de ſon eſprit & de ſes connoiſſances, eſt dans l'exacte vérité.



TABLE

DES MÉMOIRES.

PREMIER MÉMOIRE.

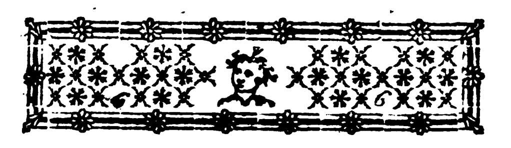
SECOND MÉMOIRE.

TROISIEME MÉMOIRE.

QUATRIEME MÉMOIRE.

CINQUIEME MÉMOIRE.

Fin de la Table.



MÉMOIRES
SUR DIFFÉRENS SUJETS
DE
MATHÉMATIQUES.

PREMIER MÉMOIRE.

Principes généraux d'Acoustique.

I.

A NE considérer que les sons, leur véhicule & la conformation des organes, on croiroit qu'un Adagio de Michel, une Gigue de Corelli, une Ouverture de Rameau,

une Chaconne de Lulli, auroient été il y a deux mille ans comme aujourd'hui, & devroient être au fond de la Tartarie comme à Paris, des Pieces de Musique admirables. Cependant rien de plus contraire à l'expérience. Si nous détestons la Musique des Barbares, les Barbares n'ont gueres de goût pour la nôtre; & en admettant toutes les merveilles qu'on raconte de la Musique des Anciens, il est à présumer que nos plus beaux Concerts auroient été fort insipides pour eux. Mais sans exercer la crédulité du Lecteur, en sortant de notre âge & de notre voisinage; les Italiens ne sont

pas grand cas de la Muſique Françoiſe, & il n'y a pas long-temps que les François avoient un mépris ſouverain pour la Muſique Italienne. Quoi donc, la Muſique ſeroit-elle une de ces choſes ſoumiſes aux caprices des Peuples, à la diverſité des lieux & à la révolution des temps?

On s'accorde cependant en un point; c'eſt que, tout étant égal d'ailleurs, l'octave, la quinte, la quarte, les tierces & les ſixtes employées dans l'harmonie, affectent l'oreille plus agréablement que les ſeptiemes, les ſecondes, le triton & les autres intervalles que nous appellons

diſſonnans. Cela poſé, je raiſonne ainſi.

Si ce conſentement unanime avoit un fondement réel dans la nature; ſi en effet tous les ſons n'étoient pas également propres à former des conſonances agréables, pourroit-on regarder la ſucceſſion des ſons & des conſonances, comme arbitraire?

Quoi, les ſons plairoient à l'oreille en ſe ſuccédant indiſtinctement, tandis qu'il y auroit un choix délicat à faire pour arriver au même but, en les uniſſant. Cela n'eſt pas vraiſemblable.

I I.

Dans toutes les conjonctures où nos ſens ſont intéreſſés, il faut avoir égard à l'objet, à l'état du ſens, à l'image ou à l'impreſſion tranſmiſe à l'eſprit, à la condition de l'eſprit dans le moment qu'il la reçoit & au jugement qu'il en porte.

L'état de l'objet eſt quelquefois indépendant de moi, mais je connoîtrai toujours ſi cet état eſt bon ou mauvais, par l'uſage auquel l'objet eſt deſtiné. L'organe peut être pur ou vicié. L'image ou l'impreſſion ſuit la condition de l'organe. L'eſprit eſt ſujet à des révolutions; &



de-là naît une foule de jugemens divers.

Qui prendrai-je pour guide? A qui m'en rapporterai-je? Eſt-ce à vous? Eſt-ce à moi? C'eſt à celui qui bien inſtruit de la deſtination de l'objet, ne riſque pas de ſe tromper ſur ſa condition; qui a l'organe pur; qui jouit d'un eſprit ſain, & en qui les images des objets ne ſont point défigurées par les ſens.

Je ne m'arrêterai point à l'application de ces principes à la ſcience des ſons; elle eſt trop facile à faire. J'obſerverai ſeulement en général qu'un objet eſt plus ou moins compliqué, ſelon qu'il offre à l'eſprit plus ou moins

de rapports à ſaiſir & à combiner en même-temps, & ſelon que ces rapports ſont plus ou moins éloignés.

Nous démontrerons dans la ſuite que le plaiſir muſical conſiſte dans la perception des rapports des ſons. D'où il s'enſuit évidemment, qu'il ſera d'autant plus difficile de juger d'une Piece de Muſique, qu'elle ſera plus chargée de ces rapports & que ces rapports ſeront plus éloignés.

Quand on ſaura comment l'oreille eſtime les intervalles des ſons, on ne balancera point à prononcer qu'elle appercevra plus facilement le rapport de

deux ſons qui ſont l'un à l'autre comme 1 à 2, que s'ils étoient entr'eux comme 18 à 19. Cela poſé, les rapports d'une ſuite de tons requerroient plus de talent, d'exercice & d'attention pour être apperçus & conſéquemment écoutés avec plaiſir, qu'il n'en faudroit pour chacun de ces rapports pris en particulier. Autre choſe eſt, eſtimer les rapports des ſons qui ſe ſuccedent dans une Piece; autre choſe, combiner ces rapports entr'eux, les comparer, les diſtinguer tous offerts en même temps dans une harmonie, & conférer les parties ſucceſſives de cette harmonie les unes avec

les autres. Tel peut embraſſer dans ſa tête toutes les parties d'un édifice immenſe ; tel autre ſaiſit à peine le rapport d'une colonne avec ſon piedeſtal.

Si donc la mélodie & l'harmonie multiplient dans un ouvrage les rapports, de ſorte qu'il n'y ait qu'une oreille des mieux exercées qui puiſſe les ſaiſir tous, elle ne ſera goûtée que d'un petit nombre, de ceux qui auront dans l'organe une aptitude, un diſcernement proportionné à la multitude de ces rapports ; & c'eſt ainſi qu'il arrivera que le chant des Barbares ſera trop ſimple pour nous, & le nôtre trop compoſé pour eux.

L'expérience vient à l'appui de mes idées. On nous assure qu'un Paysan, doué d'une oreille délicate, ne put supporter l'ensemble d'un excellent duo de Flûtes dont les parties séparées l'avoient enchanté tour à tour.

La Musique a donc des principes invariables & une théorie. C'est une vérité que les Anciens ont connue. Pythagore posa les premiers fondemens de la science des sons. Il ignora comment l'oreille apprécie les rapports ; il se trompa même sur leurs limites, mais il découvrit que leur perception étoit la source du plaisir musical.

Ariſtoxene, ne rencontrant point dans la doctrine de Pythagore les vrais principes de l'harmonie, regarda comme fauſſe une méthode qui n'étoit que défectueuſe, & ſans s'occuper à la rectifier, bannit de la compoſition les nombres & le calcul, & s'en remit à l'oreille ſeule du choix & de la ſucceſſion des conſonances. En ſorte qu'on peut dire que Pythagore ſe trompa en donnant trop à ſes proportions, & Ariſtoxene, en les réduiſant à rien. Si Pythagore, après avoir compris que le plaiſir qui naît de l'harmonie, conſiſte dans la perception des rapports des ſons, eût conſulté l'ex-

périence pour fixer les limites de ces rapports, Ariſtoxene eût été ſatisfait. Celui-ci ne pouſſa point toutefois le ſepticiſme muſical, juſqu'à traiter l'harmonie, de ſcience arbitraire.

III.

La Muſique a le ſon pour objet, & le plaiſir de l'oreille eſt ſa fin. Que le ſon exiſte dans l'air, c'eſt un fait conſtaté par le raiſonnement & par l'expérience. Un corps ſonore ne communique avec nos oreilles, que par l'air qui les environne ; où prendrions-nous donc le véhicule du ſon, ſi ce fluide ne l'étoit pas ? Car il n'en eſt pas de l'ouïe, comme de l'odorat & de

la vue ; & ce ne sont pas des molécules échappées du corps sonore qui viennent frapper nos oreilles. Le son d'une cloche renfermée dans la machine pneumatique s'affoiblit à mesure qu'on pompe l'air, & s'éteint quand le récipient est vide.

L'air est donc le véhicule du son. Mais quelle est l'altération qui survient dans ce milieu à l'occasion du corps sonore ? C'est ce que nous allons exposer. Si vous pincez une corde d'instrument, vous y remarquerez un mouvement qui la fait aller & venir avec vîtesse en delà & en deçà de son état de repos, & ce mouvement sera d'autant plus

ſenſible que la corde ſera plus groſſe. Appliquez votre main ſur une cloche en volée, & vous la ſentirez frémir. La corde vient-elle à ſe détendre, ou la cloche à ſe fendre? Plus de frémiſſement; plus de ſon.

L'air n'agit donc ſur nos oreilles qu'en conſéquence de ce frémiſſement: c'eſt donc ce frémiſſement qui le modifie. Mais comment? Le voici. En vertu des vibrations du corps ſonore, l'air environnant en prend & exerce de ſemblables ſur ſes particules les plus voiſines, celles-ci ſur d'autres qui leur ſont contiguës, & ainſi de ſuite, avec cette différence ſeule, que

l'action des particules les unes ſur les autres eſt d'autant plus grande, que la diſtance au corps ſonore eſt plus petite.

L'air mis en ondulations par le corps ſonore vient frapper le tympan. Le tympan eſt une membrane tendue au fond de l'oreille, comme la peau ſur un tambour; & c'eſt de-là que cette membrane a pris ſon nom. L'air agit ſur elle, & lui communique des pulſations qu'elle tranſmet aux nerfs auditifs. C'eſt ainſi que ſe produit la ſenſation que nous appellons ſon.

Le ſon, par rapport à nous, n'eſt donc autre choſe qu'une ſenſation excitée à l'occaſion des

pulsations successives que le tympan reçoit de l'air ondulant qui remplit nos oreilles.

Il suit de-là que la propagation du son n'est pas instantanée. Le son ne parcourt un espace déterminé que dans un temps fini. Mais ce que je regarde comme un des phénomenes de la nature les plus inexplicables, c'est que son mouvement est uniforme. Fort ou foible, grave ou aigu, sa vîtesse est constante. Les vicissitudes que la différence des lieux & des températures peut causer dans la densité de l'air & la force élastique de ses molécules, augmenteront ou diminueront la

vîteſſe du ſon ; mais ſi l'on trouve qu'il parcourt *m* de pieds dans une ſeconde ; quoique *m* puiſſe varier d'un inſtant à l'autre, il parcourra 2*m* de pieds en 2 ſecondes, 3*m* de pieds en 3 ſecondes, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'il ſe faſſe quelque révolution dans l'air.

Si l'on s'en rapporte à Halley & à Flamſteed, le ſon parcourt en Angleterre 1070 pieds de France en une ſeconde de temps. Sur la parole du Pere Merſenne & de Gaſſendi, on aſſuroit, il n'y a pas encore long-temps, que le vent favorable n'accéléroit point le ſon, & qu'il n'étoit point retardé par un vent con-

traire. Mais depuis les expériences de Derham & celles que l'Académie a faites il y a quelques années, cela passe pour une erreur.

I V.

Après avoir parlé du son en général, il est naturel de passer aux especes de son. Les causes nous en indiquent une distribution fort simple.

Le son naît ou des vibrations d'un corps, tel que les cordes & les cloches ; ou de la dilatation subite d'un air comprimé, tel que le bruit des Fusils, des Canons, du Tonnerre & des corps agités ou lancés dans l'air ; ou

de l'inspiration dans un instrument à vent, tel qu'une Flûte, un Basson, un Hautbois, une Trompette.

Les cordes tendues, soit de laiton, soit à boyaux, frémissent, oscillent, lorsqu'elles sont frappées. Le coup qu'on leur donne avec une touche ou un archet, les écarte de l'état de repos; elles passent & repassent en delà & en deçà de la ligne droite, d'un mouvement accéléré qui ne leur permet de s'y fixer, que quand il s'éteint par la résistance qui ralentit peu à peu les vibrations.

Connoissant la longueur d'une corde, son poids avec celui qui

la tend, on détermine le nombre des vibrations qu'elle fait dans un temps donné. M. Taylor, contemporain de Newton, tenta le premier la ſolution de ce Problême. Ayant à déduire de ſes formules tout ce qui concerne les cordes, je ne peux me diſpenſer d'indiquer la route qu'il faut ſuivre pour les obtenir & les raiſons qu'on a de les regarder comme exactes, quoique la premiere de ſes propoſitions ſoit fauſſe, comme nous aurons en même temps l'occaſion de l'obſerver.

La ſolution de M. Taylor eſt fondée ſur deux faits d'expérience; l'un que la plus grande

excurſion de la corde au-delà de la ligne de repos eſt fort petite relativement à ſa longueur ; & l'autre, que tous ſes points parviennent en même temps à la ligne de repos. On peut s'aſſurer par ſes yeux de la premiere de ces ſuppoſitons, & conſulter les Elémens de Phyſique de s'Graveſande, & l'Harmonie univerſelle du Pere Merſenne ſur la ſeconde.

Lemme I.

Si les ordonnées SB, SP, (Fig. 1.) *de deux courbes* AB, AP, *dont l'abſciſſe eſt commune, ont entr'elles une raiſon donnée ; les courbures au ſommet des or-*

données seront entr'elles comme les ordonnées, lorsque les ordonnées seront infiniment petites, & les courbes sur le point de coincider avec leur axe AS.

Démonstration.

Les ordonnées étant en raison donnée, les tangentes aux points B & P concourront en un même point T de l'axe AS. Car menant Kh infiniment proche de SB, on aura par hypothese $ql. rh :: SP. SB$, ou $ql. SP :: rh. SB$; & par la similitude des triangles, $ql. SP :: qP$ ou $SK. ST$, & $rh. SB :: rB$ ou $SK. St$. Donc $SK. ST :: SK. St$. Donc $ST = St$.

On a donc $sC . SB :: sc . SP$. Mais par hypotheſe $SB . SP :: sb . sp$. Donc $sC . sc :: sb . sp$, & $sC - sb . sc - sp :: bC . pc :: SB . SP$.

Soient maintenant les ordonnées sb, SB infiniment proches ; bC & pc pourront être regardées comme la meſure des angles de contact, lorſque SB & SP décroiſſant à l'infini, les courbes ſeront ſur le point de coincider avec l'axe As. Car dans ce cas Bb ſe rectifiant, devient égale à Pp ; de plus, les angles de contact ſont entre eux comme $\frac{bC}{Bb}$ à $\frac{pc}{Pp}$.

Car (*Fig.* 2.) l'angle APB eſt à l'angle BPC ou EPF,

comme AB à BC ou comme $\frac{AB}{AP}$ à $\frac{BC}{AP}$. Mais $\frac{BC}{AP} = \frac{EF}{EP}$. Donc l'angle APB eſt à l'angle EPF comme $\frac{AB}{AP}$ à $\frac{EF}{EP}$.

Donc les courbures en B & P (*Fig.* 1.) étant proportionnelles aux angles de contact, ſeront ici comme $\frac{bC}{Bb}$ à $\frac{pc}{Pp}$. C'eſt-à-dire, à cauſe de $Bb = Pp$, comme bC à pc, ou comme SB à SP. Ce qu'il falloit démontrer.

Lemme II.

La force accélératrice d'un point quelconque P, (Fig. 3.) *d'un fil élaſtique tendu & d'une groſſeur uniforme, eſt dans ſes petites vibrations, comme la courbure du fil en ce point.*

Démons-

DÉMONSTRATION.

Suppoſez que le fil élaſtique *AC* prenne dans une de ſes vibrations, la figure *APC* infiniment proche de l'axe *AC*. Le fil étant également tendu dans toute ſa longueur *AC* par le poids *G*, la tenſion ſera à peu près la même, à tous les points de la courbe *APC*.

Soit *p* infiniment proche de *P*. Tirez les tangentes *Pt*, *pt*. Achevez le parallélogramme *pt Pr*. Abaiſſez les perpendiculaires *PO*, *pO* ſur les tangentes. Suppoſons maintenant que les forces égales qui tirent en ſens contraire le petit arc *Pp*, ſoient

exprimées par les tangentes tP, tp. Décompoſez ces forces en deux autres pz, PZ & tZ, pZ. Les forces égales & directement oppoſées pZ, PZ ſe détruiſent. Le petit arc Pp n'eſt donc animé que des deux forces conjointes tZ, c'eſt-à-dire de la force tr dans la direction tr ou PO. La force motrice de cet arc dans la direction tr eſt donc à la tenſion du fil en P comme tr à tP. Mais Pp pouvant paſſer pour un arc de cercle décrit du centre O, on a par la nature du cercle, l'angle tPr = l'angle POp. Donc les triangles iſoceles tPr & POp ſont ſemblables. Donc $Pp . PO :: tr . tP$.

Donc la force motrice qui anime Pp dans la direction tr, eſt à la tenſion du fil donnée G, comme Pp à PO. Or G eſt conſtante; donc cette force motrice ſera comme $\frac{Pp}{PO}$. Mais la force accélératrice eſt toujours en raiſon compoſée de la directe de la force motrice & de l'inverſe de la matiere à mouvoir. La matiere à mouvoir eſt ici comme Pp, à cauſe de la groſſeur uniforme du fil. Donc la force accélératrice eſt comme $\frac{1}{PO}$, ou en raiſon inverſe du rayon oſculateur, ou de la courbure au point P. Ce q. f. d.

Après avoir établi ces Lemmes,

M. Taylor prétend, que si une corde *AC* (*Fig.* 4.) d'une grosseur uniforme & tendue par le poids *G* oscille, de maniere que son plus grand écart de la ligne de repos *AC*, soit presqu'insensible, & conséquemment que son accroissement en longueur, dans sa plus grande vibration, ne cause aucune inégalité dans la tension, & qu'on puisse négliger sans erreur l'inclinaison des rayons osculateurs sur l'axe; il prétend, dis-je, que la nature de la courbe *AQPC* sera telle, qu'ayant tiré deux ordonnées quelconques *QR*, *PS*, la courbure en *R* sera à la courbure en *P* comme *QR* à *PS*.

Mais il eſt conſtant que la corde peut prendre une infinité d'autres figures que celle que cet Auteur lui aſſigne , & que tous ſes points peuvent arriver à la fois à ligne droite dans une infinité d'autres cas où elle n'a point cette figure. On déduit d'un Mémoire que M. d'Alembert a envoyé à l'Académie de Berlin , ſur les cordes vibrantes , qu'en nommant a l'eſpace qu'un corps peſant parcourt en deſcendant librement pendant un temps donné θ , m le rapport de la force tendante au poids de la corde , l la longueur de la corde , entendant par ce mot la longueur d'une partie inter-

ceptée entre deux chevalets, & ſuppoſant que la courbe n'a point de ventres ni de nœuds, on déduit, dis-je, que le temps d'une vibration eſt $=\frac{2\theta\sqrt{l}}{\sqrt{2am}}$, quelque figure que la corde prenne.

Mais la propoſition de M. Taylor deviendra vraie, ſi on la rend conditionnelle, & ſi on l'énonce de la maniere ſuivante.

PROPOSITION I.

Si la nature de la courbe APQL, (Fig. 4.) *eſt telle qu'ayant tiré deux ordonnées quelconques* QR, PS, *la courbure en* Q *ſoit à la courbure en* P, *comme* QP *à* PS, *je dis que tous les points de cette courbe arriveront en même temps à la ligne droite.*

DÉMONSTRATION.

Puiſque par hypotheſe, la courbure en *P* eſt à la courbure en *Q* comme *PS* à *QR*; donc par le Lemme 2, la force accélératrice en *P* eſt à la force accélératrice en *Q*, comme *PS* à *QR*; donc les eſpaces parcourus en temps égaux *Pp*, *Qq*, ſont entr'eux comme *PS* à *QR*, ou *ſub-trahendo*, comme *pS* à *qR*. Donc *pS* & *qR* ſont dans la raiſon donnée de *PS* à *QR*; donc, Lemme 1, les courbures en *p* & *q*; & Lemme 2, les forces accélératrices en ces points, & par conſéquent les eſpaces parcourus *pm*, *qn*,

ſont entr'eux comme pS à qR, ou *ſub-trahendo*, comme mS à nR; donc en continuant le même raiſonnement, les forces accélératrices ſont toujours comme les eſpaces qui reſtent à parcourir; donc, pag. 31. Cor. 1. Liv. 1. Princip. Math. les points P & Q arriveront en même temps à la ligne de repos. Ce q. f. d.

PROPOSITION II.

Les axes AC & BD *étant donnés, décrire la courbe muſicale de Taylor.*

SOLUTION.

Tracez (*Fig.* 6.) la développante Eeg du quart de cercle

BNE. Tirez les tangentes *Bg*, *Ne*. Prenez $Mh = Ne$ & $hF = Bg$. Faites *hi* égale & parallele à *DC*, c'eſt-à-dire, à la moitié de la corde. Achevez le triangle *Fhi*. Je dis que le point *P* où la ligne *Fi* coupe la perpendiculaire *MP*, appartient à la courbe muſicale.

DÉMONSTRATION.

Soit (Fig. 5.) $BD = a$, $AC = l$, $BM = x$, $PM = y$, l'arc $BP = s$, & le rayon oſculateur en $B = r$. En faiſant *Pp* conſtante, les formules donnent pour le rayon oſculateur en *P* ou pour *PO*, $-\frac{ds\,dx}{ddy}$.

On a donc par la nature de

la courbe $a. \ a - x :: - \frac{dsdx}{ddy} . r.$ Donc $raddy = xdxds - adxds$. Intégrant & ajoutant la constante Qds, il vient $rady = \frac{1}{2} xxds - axds + Qds$. Mais en supposant $x = o$, on voit que $dy = ds$. Donc $Q = ra$. Donc l'équation $rady = \overline{ra + \frac{xx}{2} - a}xds$ exprime la nature de la courbe.

Soit $ax - \frac{1}{2}xx = zz$, on aura $rady = \overline{ra - zz}ds$; & $rraady^2 = \overline{ra - zz}^2 \times ds^2$. Mais $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Ce qui donne $\overline{2razz - z^4} dy^2 = \overline{ra - zz}^2 dx^2$. Mais la courbe ABC se confondant presque avec l'axe AC par hypothese; la quantité $zz =$ presque o relativement à ra; car r est très-

grande par rapport à a & x. L'équation se transforme donc en $2razzdy^2 = rraadx^2$. D'où l'on tire $dy = \frac{r^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$.

Soit une ordonnée mn infiniment proche de MN, & Nt parallele à BD. Par la nature du cercle MN. ND :: Nt. Nn, ou $\sqrt{2ax - xx}$. a :: dx. $Nn = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$. On a donc $dy = Nn \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, & intégrant $y = BN \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, à quoi il ne faut ni ajouter, ni ôter; car faisant $y = o$, BN devient aussi o.

Mais lorsque $PM = CD$, ou

$y = \frac{l}{2}$; alors $BN = BNE$, & par conséquent $\frac{l}{2} = BNE \times \sqrt{\frac{r}{a}}$ ou $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}l}{BNE}$. Donc en tout point de la courbe, substitution faite, on aura $y = \frac{BN \times \frac{1}{2}l}{BNE}$ ou $y. \frac{1}{2}l :: BN. BNE$.

Mais (*Fig.* 6.) $Fh = BNE$; $MF = BN$, $hi = DC = \frac{1}{2}l$. Donc $MP = y$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

PS étant à BD comme r à PO, on aura $PO \times PS = ar$. Soit 1 à c comme le diametre à la circonférence, & par conséquent $a. BNE :: 1. \frac{1}{2}c$, ou

$BNE = \frac{1}{2} ac$. Et puiſque $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2} l}{BNE}$; $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{l}{ac}$, & $\frac{r}{a} = \frac{ll}{aacc}$ ou $r = \frac{ll}{acc}$ & $PO \times PS = \frac{ll}{cc}$.

PROPOSITION III.

Soit le rapport du diametre à la circonférence $= \frac{1}{c}$, *la longueur d'une corde d'inſtrument uniformément épaiſſe* $= 1$, *ſon poids* $= P$; *le poids qui la tend* $= G$, *& la longueur d'un pendule qui ſe meut dans une cycloïde* $= D$.

Je dis que le temps d'une vibration de la corde ſera au temps d'une oſcillation du pendule, en raiſon ſous-doublée de Pl *à* $ccDG$, *& le nombre des vibrations de la corde dans le temps d'une oſcillation du pendule* $= \frac{c\sqrt{DG}}{Pl}$.

DÉMONSTRATION.

Premiere partie. Soit la force dont la particule Pp eſt preſſée au lieu $P = A$; ſon poids $= B$. On a, Lemme 2, $A . G :: Pp . PO$, & à cauſe de l'uniformité d'épaiſſeur, $P . B :: l . Pp$, & *conjungendo* $P \times A . B \times G :: l . PO$, ou $A . B :: G \times l . PO \times P$.

Maintenant ſi la particule Pp oſcilloit dans une cycloïde dont le périmetre entier fût égal à $2 PS$, en vertu d'une force motrice ou d'un poids A; le temps d'une de ſes oſcillations dans la cycloïde feroit égal au temps d'une de ſes vibrations ſur la corde; car la force accéléra-

trice de la particule dans la cycloïde décroît en raiſon de la diſtance au point le plus bas, de même que dans la corde en raiſon de la diſtance au point *S*; & d'ailleurs la force motrice de la particule dans la cycloïde ſeroit à ſon point le plus haut, *A* ou telle qu'on l'a ſuppoſée à la même particule ſur la corde. *Voyez* le Corollaire de la propoſition cinquante & unieme du Livre premier de Newton.

Mais ſi l'élément *Pp*, au lieu de ſe mouvoir dans une cycloïde dont le périmetre ſeroit égal à 2 *PS* & la force motrice ſeroit *A*, oſcilloit dans une cycloïde dont le périmetre fût 2 *D*,

en vertu de ſon poids *B*; par une propriété de la cycloïde, démontrée corollaire de la propoſition cinquantieme du Livre premier des Principes Mathématiques de Newton ; la longueur de ce ſecond pendule ſeroit $=D$. Or par la propoſition vingt-quatrieme du même Auteur, Liv. 2, les quantités de matiere ſuſpendues étant égales, le temps d'une oſcillation d'un pendule, dont la longueur eſt *D*, & dont la force motrice en commençant eſt *B*, eſt au temps d'une oſcillation d'un pendule, dont la longueur eſt *PS* & la force motrice *A*, en raiſon compoſée de la ſous-doublée de la longueur *D*

à la longueur *P S*, & de la ſous-doublée de la force *A* au poids *B*. Mais le temps d'une vibration de l'élément *P p* animé ſur la corde, d'une force *A*, eſt égal au temps d'une oſcillation de cet élément dans une cycloïde dont le périmetre ſeroit 2 *P S*, & partant *P S* la longueur du pendule mû en vertu de la même force *A*, comme nous avons vu.

Donc le temps d'une vibration de la corde ou de la particule *Pp* animée de la force *A*, eſt au temps d'une oſcillation d'un pendule, dont la longueur eſt *D* & dont la force motrice en commençant eſt *B*, en raiſon composée de la ſous-doublée de la

longueur PS à la longueur D & de la ſous-doublée du poids B à la force A. C'eſt-à-dire, en raiſon ſous-doublée de la quantité $PO \times PS \times P$ à la quantité GlD; & à cauſe de $PO \times PS = \frac{ll}{cc}$ en raiſon ſous-doublée de Pl à $ccDG$.

Il ne me reſte plus à trouver que le nombre des vibrations iſochrones que la corde fait pendant une oſcillation du pendule. C'eſt la ſeconde partie de la démonſtration.

Seconde partie. Soit ce nombre $= n$. Soit T le temps d'une vibration de la corde. t le temps d'une oſcillation du pendule. Le temps d'une vibration de la corde

pris autant de fois qu'elle fait de vibrations pendant une oscillation du pendule, doit être égal au temps d'une seule oscillation du pendule ; c'est-à-dire, que $nT = t$, ou $n. 1 :: t. T$. Mais $t. T :: \sqrt{ccDG}. \sqrt{Pl}$. Donc $n. 1 :: \sqrt{ccDG}. \sqrt{Pl}$. Donc $n = c\sqrt{\frac{GD}{Pl}}$. Ce q. f. d.

COROLLAIRE I.

Si l'on compare deux cordes différentes entr'elles ; *C* & *D* étant des quantités constantes, les nombres de vibrations faites dans un temps donné, seront comme $\sqrt{\frac{G}{Pl}}$; mais les nombres de vibrations faites dans un

temps donné, étant d'autant plus grands que le temps d'une ſeule vibration eſt petit, on a $\sqrt{\frac{G}{PL}}$. $\sqrt{\frac{g}{pl}}$: : t. T. ou T. t. : : $\sqrt{\frac{PL}{G}}$. $\sqrt{\frac{pl}{g}}$, ou les temps des vibrations comme $\sqrt{\frac{PL}{G}}$.

COROLLAIRE II.

Le Pendule dont la longueur D eſt de trois pieds, huit lignes $\frac{1}{2}$, ou de $\frac{881}{24}$ pouces, fait une oſcillation à chaque ſeconde, & 1 eſt à c comme 113 à 355. Subſtituant ces valeurs dans la formule $c\sqrt{\frac{GD}{PL}}$, on trouve le nombre des vibrations d'une corde dans une ſeconde, à peu près

comme $\frac{355}{113}\sqrt{\frac{881\,G}{24\,PL}} = 19.0341\sqrt{\frac{G}{PL}}$.

REMARQUE I.

On n'entend dans tout ce calcul, par la longueur & le poids de la corde, que la longueur & le poids de la partie interceptée entre deux chevalets & qu'on fait résonner ; c'est à l'aide de ces chevalets qu'on empêche la corde entiere de frémir.

REMARQUE II.

Quoique les formules de M. Taylord ne paroissent pas d'abord applicables à tous les cas, mais seulement à celui où la

corde vibrante prend une certaine figure ; elles ſont cependant bonnes pour tous ceux où les points de la corde arrivent en même temps à la ligne de repos.

Car ſoit (*Fig.* 7.) une corde *AB*, fixe par ſes deux extrémités en *A* & en *B* : ſi l'on imprime perpendiculairement à chaque point de cette corde une certaine vîteſſe, il eſt évident que cette corde miſe en mouvement fera des vibrations. Si les vîteſſes imprimées à chaque point ſont telles que tous les points arrivent en même temps à la ligne droite *AB*, en faiſant leurs vibrations ; alors le temps de ces

vibrations ſera le même, quelle que ſoit la vîteſſe primitive imprimée à chaque point. Ainſi, ſoit que la corde doive prendre la figure donnée par Taylor, ſoit qu'elle en doive prendre une autre, le temps de ſes vibrations ſera toujours le même, & par conſéquent elle fera entendre le même ſon. Nous nous contentons d'énoncer ces Propoſitions, dont la démonſtration rigoureuſe eſt difficile & nous meneroit trop loin.

Il en ſeroit de même ſi la corde avoit d'abord une figure *ABC* qu'elle eût été obligée de prendre par l'action de quelques puiſſances. Car il eſt évident

que relâchant ſubitement cette corde, elle fera des vibrations autour des points *A* & *B*; & que ſi tous ſes points doivent arriver en même temps à la ligne droite *AB*, ſa figure ne fait rien à la durée de ſes vibrations ni par conſéquent au ſon qu'elle produit, du moins relativement à ſon degré du grave à l'aigu; quant à ſa véhémence & à ſon uniformité, ce pourroit être autre choſe.

Mais il eſt d'expérience, qu'une corde qui a été frappée par un archet, prend en aſſez peu de temps une figure telle que tous ſes points arrivent en même temps à la ligne de repos. Ainſi les

les formules de Taylor peuvent être regardées comme générales & comme exprimant assez exactement le nombre des vibrations des cordes.

Cependant on trouve que, si l'on éloigne une corde de son point de repos en la touchant par son milieu, & que ses deux parties conservent toujours dans leurs vibrations la figure mixtiligne, ces vibrations seront de plus longue durée, que si on frappoit la corde en un autre point; ce qui donne lieu de croire que ce n'est qu'après un certain nombre de vibrations, que la corde acquiert une figure telle que tous ses points arrivent

en même temps à la ligne droite, & que ſes premieres vibrations ſont d'autant plus courtes qu'on la frappe plus loin de ſon milieu. C'eſt apparemment pour cette raiſon qu'une corde de violon, que l'on touche à vide près du chevalet, rend un ſon plus aigu que ſi on la touche par ſon milieu.

Il en eſt de même ſi le coup dont on la frappe n'eſt pas appliqué avec une certaine modération. Le coup d'archet eſt-il violent, & l'écart de la ligne de repos devient-il ſenſible, les vibrations ceſſent d'être iſochrones & ſe font en commençant un peu plus vîte que dans la ſuite.

Il en eſt encore en cela des vibrations des cordes, comme des oſcillations d'un pendule qui ne ſont iſochrones que lorſqu'elles ſont fort petites.

Il eſt inutile d'inſiſter ſur les variétés que les ſuppoſitions qu'on peut faire, introduiſent dans les formules précédentes. Il eſt évident que le nombre des vibrations d'une corde étant dans un temps donné comme la racine quarrée du poids qui la tend, diviſé par le produit fait du poids de la corde & de ſa longueur, ſi deux cordes ſont de même longueur, les nombres de leurs vibrations dans un temps donné, ſeront comme les racines quar-

Nous avons donc une façon d'exprimer les rapports des sons du grave à l'aigu. Il ne s'agit que de les considérer comme des quantités dont les nombres des vibrations produites dans un temps donné sont les mesures ; car la longueur d'une corde, sa grosseur, & le poids qui la tend, étant donnés, on a par les propositions précédentes l'expression en nombre, des vibrations produites dans un temps limité.

Voici donc ce que l'on entend précisément en Musique par une octave, une seconde, une tierce, une quarte, &c. Si vous pincez une corde, & qu'elle

faſſe un certain nombre de vibrations dans un temps donné, 4 vibrations par exemple; trouvez moyen, ſoit en la raccourciſſant, ſoit en la tendant d'un plus grand poids, de lui faire produire 8 vibrations dans le même temps donné, & vous aurez un ſon qui ſera, ce qu'on appelle, à l'octave du premier.

Si vous pincez une corde, & qu'elle faſſe deux vibrations dans un temps donné, trouvez moyen, ſoit en la raccourciſſant, ſoit en la tendant d'un plus grand poids, de lui faire produire 3 vibrations dans le même temps, & vous aurez l'intervalle du

grave à l'aigu, que les Muſiciens appellent une quinte.

Or les formules précédentes donneront toujours de combien la corde doit être raccourcie, ou tendue de plus qu'elle ne l'étoit.

Mais il y a des meſures à garder avec nos ſens, un tempérament à obſerver dans les choſes qu'on leur préſente. Ils ne peuvent embraſſer un objet trop étendu. Un trop petit leur échappe. Tous les ſons ſenſibles ſont renfermés dans des limites au-delà deſquels, ou trop graves ou trop aigus, ils deviennent inappréciables à l'oreille. Or on peut en quelque

façon fixer ces limites. C'eſt ce que M. Euler a exécuté ; & ſelon ſes expériences & ſon calcul, tous les ſons ſenſibles ſont compris en 30 & 7552, intervalle qui renferme huit octaves. C'eſt-à-dire que, ſelon ce ſavant Auteur, le ſon le plus grave appréciable à notre oreille, fait 30 vibrations par ſeconde, & le plus aigu, 7552 vibrations dans le même temps donné.

Un intervalle en général eſt la meſure de la différence de deux ſons, dont l'un eſt grave & l'autre aigu.

Soient trois ſons *a*, *b*, *c* ; *a* eſt le plus grave ; *c* le plus aigu ;

b est moyen entre *a* & *c*. Il est évident par la définition précédente, que l'intervalle de *a* à *c* est fait des intervalles de *a* à *b* & de *b* à *c*.

Si l'intervalle de *a* à *b* est égal à l'intervalle de *b* à *c*; ce qui arrive toutes les fois que *a*. *b* : : *b*. *c*. Alors l'intervalle de *a* à *c*, sera double de l'intervalle de *a* à *b*.

D'où il s'ensuit que les intervalles doivent être exprimés par les valeurs des rapports que les sons ont entr'eux. Ainsi l'intervalle de *a* à *b*, doit être exprimé par $\frac{b}{a}$, celui de *b* à *c*, par $\frac{c}{b}$; ou ce qui est encore plus commode,

on représentera le 1[r] par log. b—log. a, & le second par log. c—log. b; & faisant $a=2$, & $b=3$, on aura pour l'expression de l'intervalle que les Musiciens appellent une quinte, $l3 - l2$. D'où l'on voit que, l'expression de l'octave étant $l2 - l1$, l'octave & la quinte sont des intervalles incommensurables entre eux; en sorte qu'il n'y a aucun intervalle, quelque petit qu'il soit, qui les mesure exactement l'un & l'autre; ou aucune aliquote commune entre $l\frac{2}{1}$ & $l\frac{3}{2}$. Car il n'y a aucune puissance x entiere ou fractionnaire qui soit telle que $\frac{3^x}{2} = 2$. En effet, soit

$x = \frac{m}{n}$. Donc $\frac{3^m}{2} = 2^n$. Ce qui eſt impoſſible.

Il en ſera de même de tous les intervalles qui ſeront exprimés par des logarithmes qui différeront entr'eux comme $l\frac{3}{2}$ & $l\frac{5}{4}$.

Au contraire, on pourra comparer les intervalles qui ſeront exprimés par des logarithmes de nombres qui ſeront des puiſſances d'une même racine. Ainſi l'intervalle $\frac{27}{8}$ eſt à l'intervalle $\frac{9}{4}$ comme 3 à 2. Car le premier eſt $3\,l\frac{3}{2}$, & le ſecond eſt $2\,l\frac{3}{2}$.

On a par la même voie que nous venons de ſuivre, la facilité d'ôter un intervalle d'un autre, & de connoître l'intervalle

reſtant. Si on demande, par exemple, quel eſt l'intervalle reſtant, après qu'on a ôté la quinte de l'octave; j'ôte $l\,3 - l\,2$ de $l\,2$, & j'ai $2\,l\,2 - l\,3$. Mais $2\,l\,2 = l\,4$. Donc $2\,l\,2 - l\,3 = l\,4 - l\,3$, ou $l\,\frac{4}{3}$, ou $\frac{4}{3}$, expreſſion de l'intervalle connu ſous le nom de quarte.

Lorſque les intervalles ſont incommenſurables, on peut à l'aide des logarithmes avoir en nombres leur rapport approché. Ainſi $l\,2 = 0.3010300$ & $l\,3 - l\,2 = 0.1760913$. L'intervalle de l'octave eſt donc à l'intervalle de la quinte comme 3010300 à 1760913.

REMARQUE.

Pour abaiſſer cette fraction & avoir des rapports, de plus en plus approchés de celui qu'on cherche, il faut diviſer 301300 par 1760913. Il vient pour quotient un entier plus un reſte. Soit cet entier $= q$ & le reſte $= \frac{m}{n}$.

Transformez $\frac{m}{n}$ en $\frac{1}{\frac{n}{m}}$; & le quotient trouvé ſera $q + \frac{1}{\frac{n}{m}}$. Soit le quotient de $\frac{n}{m} = r + \frac{s}{t}$, le quotient trouvé ſera donc tranſformé derechef en $q + \frac{1}{r + \frac{s}{t}}$.

Changez la fraction $\frac{s}{t}$ en $\frac{1}{\frac{t}{s}}$, &

vous transformerez encore le premier quotient en $q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{\cfrac{t}{s}}}$,

& ainsi de suite.

Il est évident qu'à chaque transformation, on aura un nouveau rapport, plus approché du vrai que le rapport qui l'aura précédé.

Voici maintenant la maniere de diviser un intervalle quelconque en parties égales. Prenez le logarithme de cet intervalle; divisez-le en tant de parties que l'on voudra. Cherchez ensuite dans la table le nombre qui correspondra à l'une de ces parties. Il est évident que ce nombre

aura à l'unité le rapport cherché. Ainſi ſoit demandé un intervalle trois fois moindre que l'octave. Je cherche le logarithme de 2. J'en prends la troiſieme partie. Je regarde dans la table le nombre correſpondant à cette troiſieme partie, & il exprime par ſon rapport à l'unité, l'intervalle demandé.

Remarque.

Mais on pourroit chercher pourquoi j'exprime indifférement un intervalle par $\frac{b}{a}$ ou par log. *b*—log. *a*, ces quantités n'étant pas les mêmes.

En voici la raiſon. $\frac{b}{a}$ exprime

proprement le rapport des nombres de vibrations qui conſtituent les ſons ; mais log. *b* — log. *a*, peut être regardé comme exprimant les intervalles, puiſque ſi l'on fait gliſſer un chevalet ſous une corde, tandis qu'à l'aide d'un archet on en tirera un ſon non interrompu, on entendra ce ſon croiſſant, pour ainſi dire, uniformément depuis le degré le plus grave ou le ſon de la corde entiere juſqu'à ſon octave & par-delà.

Du reſte il n'y auroit pas d'inconvénient à ne prendre ces expreſſions logarithmiques que comme une hypotheſe. Il n'y a pas même d'apparence que M.

Euler qui nous les propoſe, prétende les faire valoir davantage. Car on ne peut gueres calculer ou comparer les ſons en tant que ſenſations. Les longueurs des cordes & les nombres des vibrations qui les conſtituent, ſont les ſeules choſes comparables. Mais pour repréſenter les intervalles par des logarithmes, il faudroit, par exemple, qu'en entonnant une tierce majeure, l'excès de la ſenſation du dernier ſon ſur la ſenſation du ſecond, fût double de l'excès de la ſenſation de celui-ci ſur le premier. Mais qu'eſt-ce que cela ſignifie ? & quand cela auroit un ſens bien précis, qui fait s'il eſt vrai ?

V I.

La diſtinction des ſons en graves & en aigus n'eſt pas la ſeule qu'on puiſſe faire. On les conſidere encore comme forts & foibles. La force du ſon varie ſelon la diſtance au corps ſonore. Il en eſt du ſon comme de la lumiere, & en général de tout ce qui émane d'un point conſidéré comme centre. Plus la diſtance à laquelle le ſon eſt parvenu eſt grande, plus il s'eſt affoibli; & cet affoibliſſement ſuit ordinairement la raiſon des quarrés des diſtances; c'eſt-à-dire, qu'à une diſtance double il eſt quatre fois plus foible;

neuf fois à une diſtance triple, ſeize fois à une diſtance quadruple, & ainſi de ſuite ; en ſuppoſant toutefois que ſa propagation eſt libre ; car ſi le ſon eſt dirigé de quelque côté par des cauſes particulieres, à l'Orient, par exemple, lorſqu'il tend naturellement à ſe propager vers le Midi ; la regle n'a plus lieu.

Si le ſon ſe répand & s'affoiblit comme la lumiere, il ſe réfléchit auſſi comme elle, & il peut arriver qu'à la rencontre d'une ſurface dure & polie, pluſieurs fibres ſonores ſe réuniſſent dans un même lieu. Lorſque l'on ſe trouvera dans quelques-unes

de ces chambres artificielles aux angles deſquelles des perſonnes parlent bas & s'entendent, malgré l'intervalle qui les ſépare; on n'aura qu'à lever les yeux au plafond, & l'on appercevra dans ſa figure elliptique la raiſon de ce phénomene.

Il eſt démontré que, ſi des foyers d'une ellipſe, on tire deux lignes qui ſe coupent en un point quelconque de cette courbe, ces lignes feront ſur la tangente en ce point, deux angles égaux. C'eſt-à-dire, qu'en conſidérant l'un comme angle d'incidence, l'autre ſera l'angle de réflexion. Or les plafonds de ces chambres ſont des ellipſes dont les inter-

locuteurs occupent les foyers & où les fibres ſonores qui partent de leurs bouches achevent la figure 25 , planche 4, des ſections coniques du Marquis de l'Hôpital.

Les excurſions d'une corde au-delà de la ligne de repos peuvent être plus ou moins grandes, ſans augmenter ni diminuer en nombre dans un temps donné, c'eſt-là ce qui rend le ſon plus ou moins fort, ſans changer ſon rapport à un autre ſon plus ou moins grave.

Il y a donc trois choſes à conſidérer dans les vibrations, leur étendue qui fait l'intenſité ou la véhémence du ſon ; leur

nombre qui le rend plus ou moins aigu, & leur iſochroniſme d'où dépend ſon uniformité.

J'entends par un ſon uniforme, celui qui eſt pendant toute ſa durée également grave ou aigu. Si l'on veut qu'un ſon ſoit uniforme, ou garde en s'éteignant le même rapport à un ſon donné, que celui qu'il avoit en commençant, il faut que les vibrations qui fixent ſon degré, ſoient iſochrones; & pour cet effet, la corde doit être ſuffiſamment tendue, & le coup dont elle eſt frappée, modéré. Sans ces deux conditions, elle s'écartera ſenſiblement de la ligne de repos; ſes premieres vibrations

ſeront plus promptes que les ſuivantes ; auſſi-tôt le ſon ne ſera plus uniforme , & l'oreille ſe révoltera.

Le chagrin de l'organe naît de ce que le défaut d'iſochroniſme dans les vibrations , rendant le rapport d'un ſon variable , il ne ſait en quelle raiſon ce ſon qui le frappe eſt à celui qui le précede , l'accompagne ou le ſuit. Ce qui démontre que le plaiſir muſical conſiſte dans la perception des rapports des ſons.

Remarque.

Mais cette origine n'eſt pas particuliere au plaiſir muſical.

Le

Le plaiſir en général conſiſte dans la perception des rapports ; ce principe a lieu en Poéſie, en Peinture, en Architecture, en Morale, dans tous les Arts & dans toutes les Sciences. Une belle machine, un beau tableau, un beau portique, ne nous plaiſent que par les rapports que nous y remarquons ; ne peut-on pas même dire, qu'il en eſt en cela d'une belle vue comme d'un beau concert. La perception des rapports eſt l'unique fondement de notre admiration & de nos plaiſirs ; & c'eſt de-là qu'il faut partir pour expliquer les phénomenes les plus délicats qui nous ſont offerts par les

Sciences & les Arts. Les choses qui nous paroissent les plus arbitraires, ont été suggérées par les rapports ; & ce principe doit servir de base à un essai philosophique sur le goût, s'il se trouve jamais quelqu'un assez instruit pour en faire une application générale à tout ce qu'il embrasse.

Mais si vous admettez une fois que le plaisir consiste dans la perception des rapports ; vous serez contraint de faire un pas de plus, & de convenir que le plaisir doit varier avec les rapports, & que les rapports les plus simples se saisissant avec plus de facilité que les autres,

doivent auſſi plaire plus généralement. Or de tous les rapports, le plus ſimple, c'eſt celui d'égalité ; il étoit donc naturel que l'eſprit humain cherchât à l'introduire par-tout où il pouvoit avoir lieu. Auſſi cela eſt-il arrivé. C'eſt par cette raiſon qu'on fait les ailes d'un bâtiment égales, & les côtés d'une fenêtre paralleles. Si la raiſon d'utilité demande qu'on s'en écarte, on lui obéit ; mais c'eſt comme à regret, & l'Artiſte ne manque jamais de revenir au rapport d'égalité dont il s'étoit écarté. Ce retour que l'on attribue vulgairement à l'inſtinct, au caprice, à la fantaiſie, n'eſt autre

choſe qu'un hommage rendu aux attraits naturels de l'harmonie & des rapports ; & c'eſt à lui que nous ſommes redevables d'une infinité de petits ornemens minutieux que l'on traite tous les jours d'arbitraires, & qui ne ſont rien moins. La ſeule Architecture m'en fourniroit mille exemples ; mais ils ſeroient ici déplacés.

Je me contenterai d'appliquer mes idées à une obſervation que ceux qui ont quelqu'habitude d'entendre ou de lire de la Muſique auront faite ; c'eſt qu'ordinairement les ſons aigus tiennent moins que les graves. Les deſſus ſe précipitent, tandis que les

baſſes vont lentement, à moins que le ſujet n'exige qu'elles doublent le pas. Croit-on que ce ſoit ſans raiſon que les Muſiciens aient pratiqué de cette maniere, & que leur caprice eſt la ſeule regle qu'ils aient ſuivie. Si on le croit, on ſe trompe.

Ils étoient ſecrettement guidés par la perception des rapports: s'ils ont permis aux ſons aigus de courir, & s'ils ont arrêté les ſons graves, c'eſt que les rapports que ceux-ci ont entr'eux ſont plus difficiles à ſaiſir que les rapports de ceux-là, tout étant égal d'ailleurs, puiſque la corde qui rend des ſons aigus fait plus de vibrations dans un

temps donné, que celle qui rend des ſons graves. Voilà pour l'emploi des rapports ſimples, & maintenant voici pour le retour des rapports compoſés aux rapports ſimples.

Si l'eſprit, qui eſt naturellement pareſſeux, s'accommode volontiers des rapports ſimples; comme il n'aime pas moins la variété qu'il craint la fatigue, on eſt quelquefois forcé d'uſer de rapports compoſés, tantôt pour faire valoir les rapports ſimples, tantôt pour éviter la monotonie, tantôt pour ajouter à l'expreſſion, & c'eſt de-là que naît en Muſique l'emploi que nous faiſons de la diſſonance; emploi

plus ou moins fréquent, mais preſque toujours néceſſaire : mais la diſſonance, ſelon les Muſiciens, veut ordinairement être préparée & ſauvée ; ce qui bien entendu, ne ſignifie rien autre choſe, que ſi l'on a de bonnes raiſons d'abandonner les rapports ſimples pour en préſenter à l'oreille de compoſés, il faut revenir ſur le champ à l'emploi des premiers.

OBJECTION.

Mais comment ſe peut-il faire, dira-t-on, que le plaiſir des accords conſiſte dans la perception des rapports des ſons ? La

connoiſſance de ces rapports accompagne-t-elle donc toujours la ſenſation ? c'eſt ce qu'il paroît difficile d'admettre ; car combien de gens, dont l'oreille eſt très-délicate, ignorent quel eſt le rapport des vibrations qui forment la quinte ou l'octave à celles qui donnent le ſon fondamental ? L'ame a-t-elle ces connoiſſances ſans s'en appercevoir ; à peu près comme elle eſtime la grandeur & la diſtance des objets, ſans la moindre notion de Géométrie, quoiqu'une eſpece de Trigonométrie naturelle & ſecrette paroiſſe entrer pour beaucoup dans le jugement qu'elle en porte ?

RÉPONSE.

Nous ne déciderons rien là-deſſus ; nous nous contenterons d'obſerver qu'il eſt d'expérience que les accords les plus parfaits ſont formés par les ſons qui ont entre eux les rapports les plus ſimples ; que ces rapports peuvent affecter notre ame de deux manieres, par ſentiment ou par perception, & qu'ils n'affectent peut-être la plupart des hommes que de la premiere maniere.

L'expérience apprend à modérer un archet ſelon la véhémence qu'on veut donner aux ſons. Quant à la tenſion des

cordes, on peut obſerver la regle ſuivante.

Il faut tendre les cordes autant qu'il eſt poſſible ſans les rompre. Les réſiſtances que des cordes minces d'une même matiere font à une puiſſance qui les tire dans le ſens de leur longueur, ſont comme leurs épaiſſeurs, & les épaiſſeurs comme les poids diviſés par les longueurs. On prendra donc les poids tendans en raiſon compoſée de la directe des poids des cordes & de l'inverſe de leurs longueurs.

Si le poids de la corde $= q$, ſa longueur $= a$, & le poids tendant $= p$: il faut que p ſoit

comme $\frac{q}{a}$, & par conséquent la fraction $\frac{ap}{q}$ est constante. Car $P. p. :: \frac{Q}{A}. \frac{q}{a}$. Donc $\frac{pQ}{A} = \frac{Pq}{a}$, & $\frac{AP}{Q} = \frac{ap}{q}$.

En prenant cette précaution, on pourra se promettre des sons également graves ou aigus pendant toute leur durée. Voyons maintenant ce qu'il y auroit à faire pour les avoir également forts.

VII.

Pour donner à des sons la même véhémence, outre la longueur & le poids de la corde, il faudroit considérer encore & la force qui la met en mouve-

ment & le lieu où cette force eſt appliquée. Mais la plupart des inſtrumens à cordes ſont fabriqués de maniere que la force pulſante eſt la même ; & pour ſimplifier le calcul, nous ſuppoſerons qu'elle agit ſur les cordes en des lieux ſemblables ; c'eſt-à-dire, ou aux milieux, ou aux tiers, ou aux quarts, &c.

Cela poſé, la véhémence du ſon ne dépendra plus que de la vîteſſe avec laquelle les particules de l'air viendront frapper l'oreille à chaque vibration de la corde. Or cette vîteſſe des molécules de l'air qui conſtitue la force du ſon, eſt proportion-

nelle à la plus grande vîtesse de la corde, & la plus grande vîtesse de la corde est, selon M. Euler, en raison sous-doublée de la directe du poids qui la tend & de l'inverse de sa longueur; c'est-à-dire, en conservant les mêmes expressions que ci-devant, comme $\sqrt{\frac{G}{L}}$. On lit page 11 de ses *tentamina Musicæ : Vehementia soni pendet à celeritate quâ aëris particulæ quâvis chordæ vibratione in aurem impingunt ; hæcque ex celeritate chordæ maximâ est æstimanda. Est verò hæc celeritas proportionalis radici quadratæ ex pondere chordam tendente diviso per lon-*

gitudinem ejus. D'où il conclut que, pour que la force de deux ſons ſoit la même, il faut que $\sqrt{\frac{G}{L}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$, & par conſéquent que les poids tendans ſoient comme les longueurs des cordes. *Conſequenter quò ſoni fiant æquabiles, neceſſe eſt ut pondus tendens ſemper ſit ut chordæ longitudo.*

Mais j'avouerai que, de quelque façon que je me ſois retourné, je n'ai jamais pu trouver la plus grande vîteſſe de la corde, comme la racine quarrée du poids qui la tend, diviſé par ſa longueur, ſans ſuppoſer la maſſe de la corde conſtante. Or cette

ſuppoſition n'a point été faite, & je doute qu'elle puiſſe avoir lieu ; car dans les inſtrumens à cordes de laiton, où l'épaiſſeur des cordes étant la même, elles ne different que par leur longueur & leur tenſion, & dans ceux où les cordes ont différentes longueur, épaiſſeur & tenſion, la maſſe n'eſt aſſurément pas la même dans chaque corde.

Si M. Euler entend par la plus grande vîteſſe de la corde, celle qu'elle a en achevant ſa premiere demi-vibration, je vais démontrer que $\frac{ca\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$ eſt ſon expreſſion.

PROBLÊME.

Trouver la plus grande vîtesse de la corde, ou celle qu'elle a en achevant sa premiere demi-vibration.

Solution.

Soient comme dans la Fig. 5. $BD = a$, $AC = L$, $BM = x$, $PM = y$, l'arc $BP = s$; la masse de la corde $= M$. Le rayon osculateur en $B = r$. Le rayon osculateur en $P = -\frac{dsdx}{ddy}$ & le rapport de la circonférence au diametre $= \frac{1}{c}$.

La masse de l'élément pP sera $\frac{M.Pp}{L}$. Car à cause de l'uniformité de la corde $L.M :: Pp.$

à la maſſe de l'élément Pp. Donc cette maſſe $= \frac{M.Pp}{L}$.

La force motrice en B eſt par le Lemme 2, $\frac{G.Pp}{r}$. Or la force accélératrice étant en raiſon compoſée de la directe de la force motrice & de l'inverſe de la matiere à mouvoir, & la matiere à mouvoir étant ici $\frac{M.Pp}{L}$, on aura pour la force accélératrice en B, $\frac{GL}{Mr}$.

Mais Corollaire 1, Propoſition 1, $r = \frac{LL}{a.c^2}$. Donc la force accélératrice en B ſera $\frac{G.a.c^2}{ML}$.

Soit $DM = z$.

La force accélératrice en M sera $\frac{G.a.c^2}{ML} \times \frac{DM}{BD} = \frac{G.c^2.z}{ML}$. Donc par le principe $pdt = du$, nommant u la vîtesse en M, on aura l'équation suivante $-\frac{G.c^2.zdz}{ML} = udu$; car $dt = -\frac{dz}{u}$. Donc intégrant & complétant $\frac{u^2}{2} = \frac{G.c^2}{ML} \times \overline{\frac{aa - zz}{z}}$. Donc lorsque $z = 0$; on a $uu = \frac{G.c^2.a^2}{ML}$ & $u = \frac{ac\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$. Ce que j'avois à démontrer.

REMARQUE.

Mais pour vérifier cette expression de la vîtesse, supposons-

la telle que nous venons de la trouver, & cherchons par ſon moyen le rapport des temps d'une vibration de la corde *L* & d'une oſcillation d'un pendule dont la longueur ſoit *D*.

Nous avons trouvé $u = \frac{c\sqrt{G}}{\sqrt{ML}} \times aa - zz$, mais $dt = -\frac{dz}{u}$. Donc $dt = -\frac{dz\sqrt{ML}}{c.\sqrt{G}.\sqrt{aa-zz}} = \frac{\sqrt{ML}}{c.\sqrt{G}} \times -\frac{dz}{\sqrt{aa-zz}} = \frac{\sqrt{ML}}{c\sqrt{G}}$ multiplié par l'élément du quart de cercle *BNE* dont $\frac{dz}{\sqrt{aa--zz}}$ eſt l'expreſſion. Donc le temps d'une demi-vibration $= \frac{\sqrt{ML}}{c.\sqrt{G}} \times \frac{BNE}{BD}$ $= \frac{\sqrt{ML}}{c\sqrt{G}} \times \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{ML}}{2\sqrt{G}}$.

Soit maintenant (*Fig.* 8.) le pendule CA dont la longueur $CA = D$. La peſanteur $= p$. L'arc $AB = e$. $AN = x$. L'effort en B eſt $\frac{p \times AB}{CA}$. L'effort en N eſt $\frac{p \times AN}{CA} = \frac{px}{D}$. Donc par le principe $pdt = du$, on a $-\frac{pxdx}{D} = udu$. Donc intégrant & complétant $u = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{D}} \times \sqrt{ee - xx}$. Donc $dt = -\frac{dx}{u} = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{p}} \times -\frac{dx}{\sqrt{ee-xx}}$. Donc le temps d'une demi-oſcillation $= \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{p}} \times \frac{c}{2}$. Donc le temps d'une demi-vibration eſt au temps d'une demi-oſcillation comme $\frac{\sqrt{ML}}{2\sqrt{G}}$ à $\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{p}} \times \frac{c}{2}$ ou comme $\sqrt{pML}$ à $\sqrt{ccDG}$.

Mais la maſſe multipliée par la peſanteur d'une particule eſt égale au poids ou $pM = P$. Donc $\sqrt{pML} = \sqrt{PL}$. Donc le temps d'une vibration eſt au temps d'une oſcillation comme $\sqrt{PL}$ à $\sqrt{cc \cdot DG}$. Or c'eſt préciſément ce que nous avons démontré ailleurs, & ce que Monſieur Euler ſuppoſe dans toutes ſes propoſitions ſur les cordes.

Cependant comme il eſt beaucoup plus vraiſemblable que je n'entends point cet endroit de M. Euler, qu'il ne l'eſt qu'il ſe ſoit trompé ; je ſuppoſerai que, afin que la véhémence de deux ſons ſoit la même, il faut que les poids tendans ſoient propor-

tionnels aux longueurs des cordes; d'où nous déduirons avec lui une regle qui peut être d'usage dans la construction des instrumens.

Conservant toujours les mêmes expressions; $\frac{G}{L}$, $\frac{GL}{P}$, $\frac{LL}{P}$ quotient de $\frac{GL}{P}$ divisé par $\frac{G}{L}$ & le rapport de $\frac{P}{L}$ à L sont tous constans: $\frac{G}{L}$, parce que les poids tendans doivent toujours être comme les longueurs, pour que la véhémence des sons soit la même; $\frac{GL}{P}$, parce que les poids tendans doivent toujours être en raison composée de la directe des poids des cordes & de l'inverse de

leurs longueurs, pour que les ſons ſoient uniformes. Et ces deux raiſons conſtantes diviſées l'une par l'autre donnent le rapport conſtant de LL à P, ou celui de $\frac{P}{L}$ à L. Mais $\frac{P}{L}$ eſt l'épaiſſeur de la corde; l'épaiſſeur de la corde doit donc être comme ſa longueur, & la longueur comme le poids tendant.

D'ailleurs le ſon eſt, ainſi que nous l'avons démontré, comme $\sqrt{\frac{G}{PL}}$, & mettant à la place de G & de P leurs proportionnelles L & LL, on trouve le ſon réciproquement comme la longueur de la corde.

Ainſi, ſelon le ſavant Auteur

que nous avons cité, pour conſerver à un ſon l'uniformité & l'égalité de force entre pluſieurs ſons, il faut que le poids tendant, la longueur de la corde, & ſon propre poids, ſoient tous réciproquement comme le ſon ou comme le nombre des vibrations à produire dans un temps donné, la force pulſante étant la même.

REMARQUE.

Mais tout cela n'eſt vrai que dans la ſuppoſition, que l'expreſſion de la plus grande vîteſſe n'eſt pas telle que nous l'avons trouvée. Car ſi $u = \frac{acVG}{VML}$, on aura

aura pour que les véhémences ſoient égales $\frac{VG}{\sqrt{ML}} = \frac{Vg}{\sqrt{ml}}$, & par conſéquent $\frac{VG}{\sqrt{ML}}$ conſtante. D'ailleurs lorſque les cordes ſont de même matiere, les maſſes ſont comme les poids : donc ſubſtituant P à M, on aura $\sqrt{\frac{G}{PL}}$ conſtante. Or $\sqrt{\frac{G}{PL}}$ eſt l'expreſſion du ſon. Donc la force pulſante étant la même, il faut que les ſons ſoient les mêmes pour être également forts, ou des ſons différens ne peuvent être également forts, la force pulſante étant la même; réſultat bien différent de celui que donne l'expreſſion que Mr.

Euler aſſigne à α, & cependant aſſez conforme à l'expérience.

On pourroit ſe propoſer ici un Problême dont je vais donner la ſolution, c'eſt de trouver le plus grand écart de la corde, la force pulſante étant donnée.

PROBLÊME.

La force pulſante étant donnée, trouver le plus grand écart de la corde.

SOLUTION.

Soit (Fig. 5.) F la force pulſante. Les points S de la corde partiront avec des vîteſſes qui ſeront comme SP, car je ſupppoſe que la corde prend

tout en partant la forme de la courbe musicale ; & chaque particule de cette corde étant supposée animée de sa vîtesse initiale, la somme des forces qui en résultera, sera égale à F.

Soit u la vîtesse en D, $\frac{uz}{a}$ sera la vîtesse en S, $Pp = dy$, & par conséquent la masse $Pp = \frac{Pdy}{L}$, & la quantité de mouvement en $S = \frac{uz}{a} \times \frac{Pdy}{L}$. Substituant à dy & à z leurs valeurs tirées de l'équation de la courbe, l'expression précédente se transformera en $\frac{u.P.r^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}}{L} \times \frac{\overline{a-x}dx}{\sqrt{2ax-xx}}$, dont l'intégrale est $\frac{u.P.r^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}}{L} \times \sqrt{2ax-xx}$

qu'il faut doubler & compléter : je dis doubler, parce que l'intégrale prise sans être doublée ne donneroit que la quantité de mouvement de la partie CD.

On a donc $\frac{2uPr^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}\times a^{1}}{L}=\frac{2uPr^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}}{L}$ qu'il faut faire égal à F.

Mais $r=\frac{ll}{a.c^{2}}$, donc $r^{\frac{1}{2}}=\frac{L}{a^{\frac{1}{2}}c}$.

Donc $F=\frac{2uP}{c}$.

Mais $u=\frac{ac\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$. Donc $\frac{F.c}{2P}=\frac{ac\sqrt{G}}{\sqrt{ML}}$. Or les cordes étant supposées de même matiere, $M=P$. Donc $a=\frac{F\sqrt{L}}{2\sqrt{PG}}$. Ce qu'il falloit trouver.

Cette derniere expreſſion peut encore ſe ſimplifier ; car nous avons dit que pour avoir des ſons uniformes, il falloit que G fût comme $\frac{P}{L}$; ſubſtituant donc cette valeur, il vient $a = \frac{FL}{2P}$.

Nous allons paſſer à quelques autres ſons de la premiere eſpece, & abandonner les cordes pour n'y revenir que lorſque l'analogie des corps ſonores dont nous avons encore à parler, nous y ramenera.

VIII.

On peut rapporter à la premiere eſpece de ſon, les cloches, les verges de métaux,

& même les bâtons durcis au feu; mais on ſait peu de choſe ſur ces corps. Il eſt preſque impoſſible de déterminer le ſon d'une cloche par ſa forme & ſon poids. Il faudroit entrer dans des conſidérations vagues ſur l'élaſticité & la cohéſion des parties de la matiere dont on les fond. Ce que l'on peut avancer, c'eſt que les ſons de deux cloches de même matiere & de figures ſemblables, ſeront entre eux réciproquement comme les racines cubiques des poids; c'eſt-à-dire, que ſi l'une peſe huit fois moins que l'autre, elle fera dans le même temps un nombre double de vibrations;

un nombre triple, ſi elle peſe vingt-ſept fois moins ; & ainſi de ſuite. Car en leur appliquant ce que nous avons dit des cordes, & faiſant le poids tendant G comme $\frac{P}{L}$, la formule $\sqrt{\frac{G}{PL}}$ ſe réduit à $\frac{1}{L}$; mais lorſque des corps homogenes ſont ſemblables, leurs poids ſont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues, & par conſéquent leurs côtés homologues comme les racines cubiques de leurs poids ; donc les nombres de vibrations produites dans un temps donné étant comme $\frac{1}{L}$, elles ſeront auſſi comme $\frac{1}{\sqrt[3]{P}}$.

Quant aux verges ſonores, ſi, pour eſtimer le rapport de leurs ſons, il ne faut avoir égard qu'à leurs longueurs, comme Monſieur Euler le prétend; s'il faut conſidérer les fibres qui les compoſent comme autant de cordes qui font leurs vibrations ſéparément; s'il faut négliger la force tendante, la formule $\sqrt{\frac{G}{PL}}$ devient alors $\sqrt{\frac{1}{PL}}$. Mais ſi les verges ſont ſemblables & de même matiere, P ſera comme L^3. Donc $\sqrt{\frac{1}{PL}}$ ſe réduit à $\frac{1}{L^2}$; c'eſt-à-dire, que les nombres de vibrations produites dans un temps donné, ſeront récipro-

quement comme les quarrés des longueurs.

REMARQUE.

Mais, dira-t-on, pourquoi négliger dans le cas des verges la force tendante que l'on fait entrer en calcul, lorsqu'il est question des cloches ?

C'est que la roideur des verges est si grande, relativement à la force pulsante qui les fait résonner, qu'on peut sans erreur sensible traiter comme constante la force qui les tend. Mais il n'en est pas ainsi des cloches. La figure d'une cloche s'altere sensiblement, quand elle est en volée. De ronde qu'elle étoit,

en repos, le coup du battant la rend ovale ; & l'œil apperçoit cet effet, qui ſera d'autant moins ſenſible que le poids de la cloche ſera grand, eu égard à ſon diametre ; c'eſt-à-dire, que la force tendante peut être ſuppoſée comme $\frac{P}{L}$.

La dilatation & la percuſſion ſubite de l'air, qui ſont les deux cauſes des ſons de la ſeconde eſpece, agiſſent à peu près de la même maniere.

L'extrême vîteſſe de l'air dans la dilatation, ou celle d'un corps mu dans la percuſſion, donne lieu à une compreſſion ; l'air comprimé tend à ſe reſtituer dans

ſon état naturel ; mais d'un mouvement accéléré en vertu duquel il exerce des vibrations ſemblables à celles d'une corde. Or c'eſt par ces vibrations qu'il faut expliquer le bruit, ou plutôt le ſon des vents, du tonnerre, de la poudre à canon, & de tout corps lancé dans l'air avec vîteſſe. Mais comme il eſt impoſſible d'appliquer à ces phénomenes le calcul, je paſſe aux ſons de la troiſieme eſpece, après avoir obſervé qu'il y a entre le bruit & le ſon une grande différence.

Le bruit eſt un ; le ſon au contraire eſt compoſé ; un ſon ne frappe jamais ſeul nos oreilles ;

on entend avec lui d'autres ſons concomitans, qu'on appelle ſes harmoniques. C'eſt de-là que M. Rameau eſt parti dans ſa génération harmonique ; voilà l'expérience qui ſert de baſe à ſon admirable ſyſtême de compoſition, qu'il ſeroit à ſouhaiter que quelqu'un tirât des obſcurités qui l'enveloppent, & mît à la portée de tout le monde, moins pour la gloire de ſon inventeur, que pour les progrès de la ſcience des ſons.

I X.

Plus la cauſe d'un phénomene eſt cachée, moins on fait d'efforts pour la découvrir. Mais

cette pareſſe, ou ce découragement des eſprits, n'eſt ni le ſeul, ni peut-être le plus grand obſtacle à la perfection des Arts & des Sciences. Il y a une ſorte de vanité qui aime mieux s'attacher à des mots, à des qualités occultes, ou à quelqu'hypotheſe frivole, que d'avouer de l'ignorance; & cette vanité leur eſt plus funeſte encore. Bien ou mal, on veut tout expliquer, & c'eſt, grace à cette manie, que l'horreur du vide a fait monter l'eau dans les pompes, que les tourbillons ont été la cauſe des mouvemens céleſtes, que l'attraction ſera long-temps encore celle de la peſanteur des corps,

& pour en revenir à mon ſujet, qu'on avoit attribué juſqu'à préſent au frémiſſement de la ſurface intérieure du tuyau, le ſon & les autres propriétés des Flûtes. Ces inſtrumens avoient beau rendre le même ſon, quoique l'épaiſſeur, la matiere & l'ouverture en fuſſent différentes; on s'en tenoit opiniâtrément à un ſyſtême que la diverſité ſeule de la matiere étoit capable de renverſer.

Enfin M. Euler, après avoir ſoigneuſement examiné la ſtructure des Flûtes, trouva une maniere d'en expliquer les effets, auſſi ſolide qu'ingénieuſe. Ce morceau de Phyſique eſt peu

connu, quoique ce soit un des plus beaux que nous ayons; ce sont ces deux motifs réunis au besoin que j'en ai pour les conséquences que j'en tirerai, qui me déterminent à l'insérer ici.

La Flûte est composée ainsi que les tuyaux appellés dans un buffet d'Orgue, tuyaux à bouche ou de mutation; du pied *A A B B* qui est en bec ou en cône: c'est ce bec qui introduit le vent qui fait résonner le tuyau. A ce pied est joint le corps *B B D D* du tuyau. Il y a entre le pied & le corps un diaphragme *E E F* percé d'une ouverture par où le vent s'échappe. On appelle cette ouverture lumiere.

Enfin au-deſſous de cette ouverture eſt la bouche *BBCC* du tuyau. C'eſt une eſpece de fenêtre dont la levre d'en bas *CC*, qui eſt en biſeau, coupe le vent au ſortir de la lumiere, & n'en admet dans le tuyau qu'une couche légere. Telle eſt auſſi la figure des anches & celle que prennent les levres au défaut d'anches ; ce qui fait rentrer les Flûtes traverſieres & autres, dans la claſſe des Flûtes à bec ou tuyaux de mutation.

Il faut obſerver de plus, que dans tous les inſtrumens à vent, les parois intérieures ſont dures & polies, & que l'air n'y rencontre aucun obſtacle.

Il ſuit de cette conſtruction que l'air au ſortir de la lumiere raſe la ſurface intérieure du tuyau, & comprime celui dont il étoit rempli. Cet air comprimé ſe dilate à ſon tour, & le ſon eſt produit par ces vibrations réciproques qui naiſſent de l'inſpiration & qui durent autant qu'elle.

Cela ſuppoſé, dit M. Euler, cherchons le ſon d'une Flûte dont la longueur & la capacité ſoient données, & renonçons à cette explication, ſi la ſolution de ce problême ne s'accorde pas avec les expériences.

Le corps ſonore dont les vibrations tranſmiſes à l'air vien-

nent frapper notre oreille, c'eſt l'air même contenu dans le tuyau, dont la quantité ſe déterminera par la longueur & la capacité de la Flûte.

La peſanteur de l'atmoſphere qui contraint l'air, dont la Flûte eſt remplie, d'exercer des vibrations, fait ici la fonction de poids tendant, & ce poids ſera connu par la hauteur à laquelle le vif-argent eſt ſuſpendu dans le tube de Torricelli.

Voilà donc le cas des Flûtes réduit à celui des cordes & ſoumis à la formule $\sqrt{\frac{G}{P \cdot L}}$.

Soit *a* la longueur d'une Flûte; *b*·*b* ſon ouverture; le rapport de

la peſanteur de l'air à celle du vif-argent $\frac{m}{n}$; la hauteur du mercure dans le barometre k; c'eſt-à-dire, que nous avons une corde dont la longueur eſt a, le poids $mabb$, & la tenſion égale à la preſſion de l'atmoſphere. Mais les preſſions des fluides ſont, comme on le démontre en hydrodynamique, comme les baſes multipliées par les hauteurs. La baſe eſt ici bb, & la hauteur k; donc le poids tendant eſt comme $nkbb$; & par conſéquent le nombre des oſcillations faites dans une ſeconde comme $\frac{355}{113}\sqrt{\frac{881\,nkbb}{24a \times mabb}}$

$= \frac{355}{113a} \sqrt{\frac{881nk}{24m}} =$ au ſon qu'il falloit déterminer.

Or la raiſon de m à n étant toujours à peu près la même, & les différentes températures de l'air n'influant pas conſidérablement ſur la hauteur k, les ſons des Flûtes cylindriques ou priſmatiques ſeront entr'eux réciproquement comme les longueurs. Car effaçant toutes les conſtantes, l'équation précédente ſe réduit à $\frac{1}{a}$.

Mais entrons dans le détail des phénomenes, c'eſt lui qui ruine ou ſoutient une hypotheſe. Cherchons donc en demeurant dans celle de M. Euler,

comment le ſon d'une Flûte, dont la longueur eſt donnée, eſt au ſon d'une corde, dont la longueur, le poids & la tenſion ſont connus. Si l'expérience & le calcul conſervent entre la corde & la Flûte l'uniſſon que nous y ſuppoſerons, il en réſultera pour la théorie que nous venons d'expoſer, un grand degré de certitude.

Soit la plus grande valeur de $\frac{n}{m}$ dans les temps chauds 12000. Sa plus petite valeur dans les temps froids 1000. La plus grande hauteur *k* du mercure dans le Barometre 2460. Sa plus petite hauteur 2260. Donc le

Barometre & le Thermometre étant l'un & l'autre à leurs plus grandes hauteurs, le son d'une Flûte quelconque *a*, sera comme $\frac{960771}{a}$; & lorsqu'ils seront à leurs plus petites hauteurs, comme $\frac{840714}{a}$; & prenant un milieu entre ces deux expressions, on aura $\frac{900000}{a}$ pour le nombre des vibrations, & par conséquent pour le son d'une Flûte *a*, dans les temps ordinaires, lorsqu'il ne fait ni bien froid ni bien chaud. Donc une Flûte qui fait 100 vibrations par seconde, a 9000 scrupules ou 9 pieds du rhin de longueur. Donc une Flûte qui feroit 118 vibra-

tions par ſeconde, & qui réſonneroit le *c* ou le C ſol ut, auroit 7627 ſcrupules ou 7 ½ pieds du rhin de longueur; ce qui s'accorde avec l'expérience. Car c'eſt en effet cette longueur que l'on donne aux tuyaux que l'on prend pour le C ſol ut.

Mais, dira-t-on, ce n'eſt pas 7 ½ pieds qu'on leur donne; mais 8 pieds communément.

J'en conviens; mais il faut négliger cette différence; car ſelon la température de l'air, le tuyau rendra des ſons qui ſeront entre eux dans la raiſon des nombres 840714, 960771, ou dans le rapport de 8 à 9; ce qui prend

plus d'un demi pied ſur la longueur entiere du tuyau.

Ces altérations ſucceſſives dans le ſon d'une même Flûte achevent de confirmer le ſyſtême de M. Euler. Car les Muſiciens éprouvent tous les jours dans la comparaiſon qu'ils ont à faire des inſtrumens à corde avec les inſtrumens à vent, que pour les mettre à l'uniſſon, il faut tantôt diminuer, tantôt augmenter la tenſion des cordes, & que la plus grande différence eſt d'un ton majeur entier, intervalle exprimé par le rapport de 8 à 9.

On obſerve encore que les Flûtes ont plus de haut dans un

temps ſerein & chaud, que dans un temps froid & orageux, & qu'elles deviennent un peu plus aiguës pendant qu'on en joue. Ces deux phénomenes partent de la même cauſe. C'eſt que la chaleur naturelle de l'air dans un temps ſerein, ou celle qu'il reçoit pendant l'inſpiration, rend ſes vibrations un peu plus promptes, & par conſéquent le ſon un peu plus aigu ; & d'ailleurs le poids de l'air m étant moindre, la fraction $\frac{n}{m}$ eſt plus grande, & par conſéquent le nombre des vibrations plus grand.

La force du ſon dépend, dans les Flûtes, de la violence de l'inſ-

piration & du rapport de la capacité du tuyau à ſa longueur. Il en eſt encore en cela de ces inſtrumens comme des cordes. La longueur & l'épaiſſeur de celles-ci répondent à la longueur & à la capacité de ceux-là.

Toute corde n'eſt pas propre à rendre tout ſon. Il lui faut quelquefois une certaine groſſeur pour un ſon donné. On ne peut pas non plus augmenter ou diminuer à diſcrétion la capacité d'une Flûte de longueur donnée. Il y a des limites au-delà deſquelles elle ne réſonne plus. Mais appliquant aux tuyaux à bouche, ce que nous avons dit de la longueur, du poids, & de la

tenſion des cordes ; pour en tirer des ſons uniformes, il faut faire la baſe ou la capacité proportionnelle à la longueur, & la longueur proportionnelle à la preſſion de l'atmoſphere qui eſt toujours proportionnelle à l'ouverture.

Quant à l'inſpiration, elle a auſſi ſes lois. Trop foible, la Flûte ne rend point de ſon. Trop forte, elle fait réſonner la Flûte une octave au-deſſus de ſon ton. Plus forte encore, elle rendra la douzieme, la quinzieme, & ainſi de ſuite.

Pour découvrir le rapport de ces degrés ſucceſſifs, nous ſerons forcés de revenir aux cordes

& d'en examiner quelques propriétés. En attendant, nous obſerverons que, la force du ſon dans les Flûtes étant proportionnelle à celle de l'inſpiration, plus l'inſpiration ſera violente, le ſon demeurant le même quant au degré du grave à l'aigu, plus les vibrations de l'air contenu dans le tuyau ſeront grandes, ſans toutefois qu'elles en deviennent plus fréquentes. Mais la grandeur ou l'amplitude des vibrations eſt tellement déterminée par la capacité ou le diametre de la Flûte, que le même ſon ne peut pas ſubſiſter & conſerver ſon degré dans toutes les variations poſſibles de l'Inſpiration.

Il faut même qu'après avoir passé successivement par différens degrés du grave à l'aigu, il s'éteigne entiérement.

X.

Ce paragraphe sera sans doute un des meilleurs de ce Mémoire; je le dois presqu'en entier à M. de Fontenelle. Cet Auteur dit ingénieusement à son ordinaire, Histoire de l'Académie, année 1700, qu'une recherche, ou même une découverte, n'est, pour ainsi parler, que l'épisode d'une autre. Monsieur Sauveur, ajoute-t-il, en examinant la théorie de certains instrumens qui vont par *sauts* & passent irré-

gulièrement d'un ton à un autre, fut obligé, pour en rendre raiſon, de recourir à des expériences qui lui produiſirent un phénomene dont il fut extrêmement ſurpris; car quel Philoſophe auroit cru qu'un corps mis en mouvement de maniere que toutes ſes parties y doivent être, en conſerve cependant quelques-unes immobiles dans de certains intervalles, ou plutôt en rend quelques-unes immobiles par une diſtribution ſinguliere qu'il ſemble faire entr'elles du mouvement qu'il a reçu.

Si une corde d'inſtrument eſt tendue ſur une table, & qu'un chevalet mobile qui gliſſe ſous

la corde ſoit arrêté à quelqu'un de ſes points, en ſorte que, quand on pincera par le milieu l'une des deux parties déterminées par la poſition du chevalet, l'autre ne participe point du tout à l'ébranlement, on ſait que le ton de la partie pincée ſera au ton de toute la corde, en raiſon des longueurs de cette partie & de la corde entiere. Si cette partie eſt $\frac{1}{4}$, elle ſera à la double octave en haut de toute la corde. Si elle eſt $\frac{1}{2}$, elle ſera à ſon octave; & ſi au lieu de pincer $\frac{1}{4}$, on pinçoit la partie $\frac{3}{4}$, il eſt encore indubitable que les longueurs de cette partie & de la corde entiere étant comme 3

à 4, l'une résonneroit la quarte de l'autre.

Mais si le chevalet n'empêche pas entiérement la communication des vibrations des deux parties ; si ce n'est qu'un obstacle léger, comme le bout d'une plume ; si la corde est menue, les deux parties, quoiqu'inégales, rendront le même ton & formeront le même intervalle avec la corde entiere.

Il ne seroit pas étonnant qu'elles fussent toutes deux à l'unisson de la corde entiere ; on concevroit alors que l'obstacle léger ne les empêcheroit pas de faire les mêmes vibrations que la corde entiere, & qu'il ne tiendroit lieu

de rien. Mais il eſt effectivement obſtacle ; il détermine les parties de la corde à être effectivement parties & à rendre un ſon différent de la toute, & le merveilleux eſt qu'il laiſſe le même ton à des parties inégales. Si, par exemple, l'obſtacle eſt au quart de la corde, non-ſeulement ce quart étant pincé rend la double octave aiguë de la toute ; mais l'autre partie qui eſt trois quarts, & qui devroit donner la quarte de la toute, donne la même double octave.

Sur ce phénomene ſi bizarre, M. Sauveur imagina que, puiſque $\frac{3}{4}$ rendoient le même ton que $\frac{1}{4}$, ils ne devoient faire des

vibrations proportionnées à leurs longueurs ; qu'il falloit qu'ils se partageassent en trois parties égales chacune au premier quart, & qui fissent chacune leurs vibrations séparément. En ce cas, c'eût été la même chose que si l'on eût pincé à la fois ces trois parties égales. Elles eussent été toutes à l'unisson entr'elles & avec le premier quart ; c'est-à-dire, à la double octave aiguë de la corde entiere. Mais cela supposé comme vrai, il y auroit donc eu nécessairement entre les vibrations de deux parties égales un point immobile qui ne suivoit ni l'une ni l'autre vibration, & par conséquent deux

points immobiles ſur les $\frac{1}{9}$ de la corde, & 3 dans la corde entiere ; en comptant pour un de ces points celui où eſt poſé l'obſtacle léger, parce qu'il eſt effectivement entre deux vibrations. Monſieur Sauveur appelle ces vibrations partielles & ſéparées, ondulations ; leurs points immobiles, nœuds ; & le point du milieu de chaque vibration, le ventre de l'ondulation.

Lorſque M. Sauveur apporta à l'Académie cette expérience de deux tons égaux ſur les deux parties inégales d'une corde ; elle y fut reçue avec tout le plaiſir que font les nouvelles découvertes. Mais quelqu'un de la



Compagnie se souvint qu'elle étoit déjà dans un ouvrage de M. Wallis. Quant à la pensée des nœuds, qui n'étoit qu'un petit systême, on trouva dans l'assemblée le moyen d'éprouver si elle étoit vraie. On mit sur les points de la corde où, suivant la supposition, se devoient faire les nœuds & les ventres des ondulations, de très-petits morceaux de papier à demi pliés qui pouvoient tomber sans peine au moindre mouvement. On pinça la corde, & l'on vit avec contentement, & même avec admiration, que les petits papiers des ventres tomberent aussi-tôt, & que ceux des nœuds demeurerent

en place : dans la ſuite, pour les diſtinguer mieux, on fit les uns rouges, & on laiſſa les autres blancs ; de ſorte que les rouges & les blancs étoient diſpoſés alternativement, & l'on vit toujours qu'il n'y avoit que ceux d'une couleur qui tombaſſent. Les points qui d'eſpace en eſpace ſe maintiennent immobiles entre tous les autres points qui ſe meuvent, & dans un corps qui auroit dû prendre du mouvement ſelon toute ſa longueur, auroient été ſans doute une grande merveille pour un Phyſicien qui n'y auroit pas été préparé & amené par degrés.

Il paroît par-là que l'obſtacle

léger, placé comme nous l'avons ſuppoſé juſqu'ici ſur un quart de corde, n'empêche pas à la vérité la communication des vibrations de deux parties de la corde, parce qu'il eſt léger; mais qu'au moins il empêche une communication facile, parce qu'il eſt obſtacle. Il détermine d'abord les deux parties à faire ſéparément & indépendamment l'une de l'autre leurs vibrations. Mais comme elles ſont inégales, la plus petite fait ſes vibrations beaucoup plus vîte; & parce qu'elle communique toujours avec l'autre qui eſt beaucoup plus lente, elle la hâte & la force à ſuivre ſon mouvement.

Or cette partie plus grande ne peut jamais, à cauſe de ſa longueur, faire ſes vibrations en même temps que la plus petite, & lui obéir, à moins qu'elle ne ſe partage en parties toutes égales à cette partie qui domine à cauſe de ſa vîteſſe.

Si au lieu de mettre l'obſtacle ſur $\frac{1}{4}$, on le met ſur $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, &c. ce ſera toujours la même choſe, & le ton des $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, &c. ne ſera que celui de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, &c. en un mot, l'obſtacle léger étant poſé ſur une partie aliquote quelconque de la toute, c'eſt elle ſeule qui donne le ton à la partie plus grande qui eſt de l'autre côté.

Mais ſi l'obſtacle n'eſt point ſur une partie aliquote ; par exemple, ſi la corde ayant cinq parties, il eſt ſur les $\frac{2}{5}$; ces $\frac{2}{5}$ forçant d'abord les $\frac{3}{5}$ qui ſont de l'autre côté à prendre une vîteſſe égale à la leur, ces $\frac{3}{5}$ ne la peuvent prendre qu'en s'accourciſſant & en s'égalant aux $\frac{2}{5}$. Il reſte donc $\frac{1}{5}$ qui eſt la plus petite partie & dont les vibrations ſont les plus promptes. Cette petite partie qui n'a point été déterminée d'abord par la poſition de l'obſtacle, & qui ne ſe forme que dans la ſuite & par une conſéquence de la formation des autres, ne laiſſe pas de donner la loi à tout le reſte, & les $\frac{2}{5}$ &

les $\frac{3}{5}$ ne rendront le ton que de $\frac{1}{5}$. Si l'obstacle étoit mis sur $\frac{4}{7}$, il est évident par la même raison qu'elle se partageroit aussi en 7 parties ; c'est la même chose pour tous les autres cas semblables.

En appliquant cette hypothese sur trois vingtiemes, il semble que ces $\frac{3}{20}$ partageant d'abord la corde en parties égales à elles, il resteroit pour petite partie qui devroit dominer le reste $\frac{2}{20}$ ou $\frac{1}{10}$, & qu'ainsi la corde se partageroit en dixiemes. Mais il faut remarquer que l'obstacle doit toujours former un nœud à l'endroit où il est, parce qu'effectivement il arrête en partie les

vibrations & qu'il eſt le premier principe qui les change. Or dans l'hypotheſe préſente, ſi la corde ſe partageoit en dixiemes, l'obſtacle ſe trouveroit ſur un ventre & non ſur un nœud; ce qui eſt impoſſible, & par conſéquent il faut que la corde ſe partage en vingtiemes.

Donc, que l'obſtacle ſoit mis ſur une partie aliquote ou non, la corde ſe partagera toujours dans le nombre de parties marqué par le dénominateur de la fraction.

Il s'enſuit de-là que quelque différentes que ſoient les parties où l'on met l'obſtacle, le ton eſt le même toutes les fois que le

dénominateur de la fraction eſt néceſſairement le même. Par exemple, la corde étant de 20 parties, il ſera indifférent de mettre l'obſtacle ſur $\frac{1}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{19}{20}$. Mais non pas ſur $\frac{2}{20}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{5}{20}$, &c. parce que ces fractions pouvant ſe réduire, le dénominateur n'eſt pas néceſſairement le même.

En faiſant couler l'obſtacle ſous les 20 diviſions de la corde, il eſt aiſé de voir quels ſont les nœuds ou intervalles des ſons des différentes parties de la corde, comparés au ſon de la corde entiere. En voici une petite Table tirée de l'Hiſtoire de l'Académie.

TABLE.

Parties de la corde divisée en vingtiemes.	*Intervalles rendus par les différentes parties relativement à la corde entiere.*
$\frac{1}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{19}{20}$,	$\frac{1}{16}$ est la quatrieme octave de 1.

$\frac{1}{16}$ & $\frac{1}{20}$ sont entre eux comme 4 à 5, expression de la tierce majeure. C'est-à-dire, que si l'on divise une corde 1 en vingtiemes, & que si l'on met d'un côté d'un obstacle léger $\frac{1}{20}$, & de l'autre $\frac{19}{20}$, ou $\frac{3}{20}$ & $\frac{17}{20}$, ou $\frac{7}{20}$ & $\frac{13}{20}$, &c. les sons rendus par les deux parties de la corde feront une tierce majeure avec la quatrieme octave de la corde entiere.

Ou $\frac{2}{10}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{8}$ est la troisieme octave de 1. Or les sons rendus par $\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{10}$ sont entr'eux réciproquement comme ces longueurs, c'est-à-dire, comme 8 à 10, ou 4 à 5, tierce majeure. Donc les parties de la corde entiere $\frac{2}{10}$ & $\frac{18}{10}$, & $\frac{1}{10}$ & $\frac{9}{10}$ divisée par un obstacle léger, donneront des sons qui seront à la tierce majeure de la troisieme octave aiguë de la corde entiere.

Ou $\frac{4}{20}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ est la seconde octave de 1. Mais les sons rendus par $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$, sont entr'eux réciproquement comme ces longueurs ou comme 4 à 5, c'est-à-

dire, qu'ils feront à la tierce majeure de la feconde octave de 1 ou de la corde entiere.

REMARQUE.

Une expérience qui méritoit bien d'être faite, & qu'il ne paroît pas qu'on ait tentée, c'eût été de divifer la corde entiere en parties égales, & une de ces parties égales en deux autres qui euffent un rapport incommenfurable entr'elles, comme celui de 1 à $\sqrt{2}$, ou $\sqrt{3}$, ou $\sqrt{5}$, & de laiffer l'incommenfurable d'un côté de l'obftacle léger, & le refte de la corde de l'autre.

QUESTIONS.

Si les deux parties dans lesquelles la corde entiere est divisée par l'obstacle léger, sont incommensurables entr'elles ;

1°. Quel sera le son rendu par les deux parties ?

2°. Quel rapport aura ce son avec celui de la corde entiere ?

3°. Y aura-t-il sur la corde pincée, après avoir ainsi placé l'obstacle léger, des ondulations, des nœuds, des ventres & des points immobiles ?

4°. Dans la supposition qu'il y ait des nœuds, où seront-ils placés ?

RÉPONSE.

Lorſque les parties de la corde ſont incommenſurables, n'arrivera-t-il pas un phénomene analogue à celui que rapportent quelques Auteurs d'optique qu'il a ſi fort embarraſſés. C'eſt la viſion confuſe de l'objet, lorſque les rayons réfléchis ou rompus entrent dans l'œil convergens ; c'eſt-à-dire, comme s'ils venoient d'un point placé derriere l'œil. Si cela eſt, voilà des choſes communes entre deux ſenſations d'une eſpece bien différente.

Il eſt évident qu'en continuant la Table précédente, le mouvement

mouvement de l'obſtacle léger, toujours promené de l'une de ces parties à l'autre, produiroit une ſuite irréguliere de tons, tantôt les mêmes, tantôt différens, & qu'un inſtrument de Muſique en qui il ſe trouveroit quelque choſe de pareil, feroit ce qu'on appelle des ſauts, & paſſeroit d'un ton à l'autre, ou reviendroit au même, ſans aucune proportion ſenſible, ſans degrés ſucceſſifs, & contre toutes les regles connues. Auſſi la Trompette marine, qui n'eſt qu'un monocorde, où le doigt tient lieu de l'obſtacle léger, a-t-elle de ces bizarreries qui avoient été inexplicables juſqu'à

Monſieur Sauveur, & qui deviennent fort claires par le ſyſtême des ondulations. La Trompette ordinaire, le Cors de chaſſe, les grands inſtrumens à vent, ſont pareillement ſujets à ces irrégularités ; elles naiſſent de la violence de l'inſpiration. Si les deux moitiés de l'inſtrument font ſéparément leurs oſcillations, le ſon monte à l'octave. Si la force de l'inſpiration étant augmentée, les tiers de l'inſtrument, ou plutôt de l'air qu'il contient, font ſéparément leurs oſcillations, on aura la douzieme. Si on augmente ſucceſſivement l'inſpiration, & qu'on faſſe oſciller les $\frac{1}{4}$, les $\frac{1}{5}$ &

les $\frac{1}{6}$, &c. l'inſtrument fera des ſauts, & rendra des ſons dont il eſt facile de connoître le rapport au ſon le plus grave.

La diviſion de l'air contenu dans les tuyaux des Flûtes, ſuit cette progreſſion 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, &c.; & quoique la nature des Cors de chaſſe, des Clairons & des Trompettes, ne ſoit pas tout-à-fait la même que celle de ces inſtrumens, l'inſpiration produit en eux les mêmes diviſions. D'où il eſt aiſé de conclure qu'ils n'ont aucun ſon moyen entre la premiere octave & la ſeconde, qu'un ſeul ſon moyen entre la ſeconde octave & la troiſieme, que trois ſons

moyens entre la troiſieme octave & la quatrieme, &c.

On peut propoſer ici un problême. La longueur de la Flûte & ſon ouverture étant données, trouver la force de l'inſpiration pour que l'inſtrument faſſe des ſauts, paſſe par exemple de la premiere octave 1 à la ſeconde $\frac{1}{2}$.

Voici comment je le réſous. Il eſt à préſumer que les deux parties de l'air contenu dans l'inſtrument ne commencent à oſciller ſéparément, que lorſque l'inſpiration a été aſſez forte pour donner à l'air entier la plus grande vibration qu'il peut exercer & le couper, pour ainſi dire,

en deux parties égales. Mais en conſidérant, comme nous avons fait juſqu'à préſent, & comme le calcul & l'expérience nous y autoriſoient, l'air contenu dans la Flûte, comme une corde dont le poids de l'atmoſphere étoit le poids tendant, il eſt évident que la plus grande oſcillation de l'air contenu dans la Flûte répondra au plus grand écart de la corde. Or nous avons trouvé le plus grand écart de la corde, la force pulſante étant donnée; nous trouverons donc ici par la même voie & par la même formule, la force pulſante, ou la violence de l'inſpiration, ſi le plus grand écart eſt donné.

Mais le plus grand écart eſt donné ; c'eſt le diametre de l'ouverture de la Flûte ; donc nous aurons la violence de l'inſpiration ou la force pulſante $F = \frac{2a\sqrt{PG}}{\sqrt{L}}$.

La même formule aura lieu pour tous les autres ſauts, en ſuppoſant la Flûte raccourcie ; ainſi veut-on avoir la violence de l'inſpiration, pour que l'air contenu ſe diviſe en trois parties, & par conſéquent pour que la Flûte faſſe le ſaut $\frac{1}{3}$, on n'a qu'à employer dans la formule au lieu de L, $\frac{2L}{3}$, & ainſi des autres ſauts.

On obſervera que tout ce que j'ai dit juſqu'à préſent, concerne

les tuyaux prifmatiques & cylindriques. Il feroit peut-être plus difficile de déterminer leurs fons, s'ils étoient fuppofés de quelque figure dont les côtés fuffent convergens ou divergens. Mais on pourroit toujours rapporter l'air qu'ils contiendroient à une corde, le poids de l'atmofphere au poids tendant, & réfoudre les problêmes par les formules que nous avons données.

On peut tirer de ce que nous avons dit fur les Flûtes une maniere de fixer le fon. Ce fera le fujet de ce dernier paragraphe.

X I.

Avant qu'une corde, dont la longueur eft 2, foit accourcie

jusqu'à n'être plus que 1, c'est-à-dire, à l'octave en haut du son qu'elle rendoit auparavant, elle peut passer par autant de divisions que l'on voudra. Monsieur Sauveur, dans son nouveau Systême de Musique, fixe ce nombre de divisions à 43, & ces 43 parties qu'il appelle *mérides* & qui remplissent toute l'étendue de l'octave, donnent les tons les plus sensibles & les plus ordinaires qui y soient compris. Mais si l'on veut aller à des divisions de sons plus délicates, il faut encore diviser chaque méride en 7 parties qui s'appelleront *eptamérides*; & l'on aura par conséquent dans une octave 301 eptamérides.

Les vibrations de deux cordes égales doivent toujours aller enſemble, commencer, finir, recommencer dans le même inſtant. Mais celles de deux cordes inégales, doivent être tantôt ſéparées & tantôt réunies, & d'autant plus long-temps ſéparées, que les nombres qui expriment l'inégalité de ces cordes ſeront plus grands. Car que deux cordes ſoient entr'elles comme 1 à 2, & qu'elles commencent en même temps leurs vibrations, il eſt évident par tout ce que nous avons dit juſqu'à préſent, qu'après deux vibrations de la plus courte & de la plus aiguë & une vibration de l'autre, elles

recommenceront à partir ensemble, & qu'ainsi sur deux vibrations de la plus courte, il y aura toujours une réunion de vibrations de toutes les deux. Si elles étoient comme 24 à 25, il n'y auroit une réunion de leurs vibrations qu'à chaque vingt-cinquieme vibration; & il est clair que pour de plus grands nombres les réunions sont encore plus rares.

Voilà bien des rapports, mais rien d'absolu. Pour s'entendre, il faudroit fixer un terme au-dessus duquel on prît les tons aigus; & au-dessous, les tons graves. A cet effet, on s'est servi, & on se sert encore d'un petit

tuyau de bois ou de métal, ajuſté à l'extrémité d'un ſoufflet chargé d'un poids qui en chaſſe l'air & qui fait réſonner le tuyau. Cet inſtrument s'appelle un ton. Ce nom lui vient de ſon uſage ; car c'eſt par ſon moyen que l'on détermine le ton ſur lequel les voix & les inſtrumens doivent s'accorder dans un Concert. Et comme les Muſiciens ſouhaitent que ce ton ſoit toujours le même, ils ſuppoſent que l'inſtrument dont ils uſent pour le retrouver d'un jour à l'autre, le rend exactement. Suppoſition qui n'eſt pas vraie à la rigueur ; car 1°. un tuyau d'orgue de quatre pieds, qui par ſa nature eſt beaucoup

plus juſte qu'un petit inſtrument de bois ou de métal, ne donne pas toujours le même ſon. 2°. La matiere du petit tuyau étant ſuſceptible d'altération, le ſeul uſage qu'on en fait, le temps, cent autres accidens doivent en changer ſenſiblement le ſon au bout de quelques années. 3°. Il eſt conſtant que l'inſpiration plus ou moins forte, hauſſe ou baiſſe le ſon dans un tuyau. 4°. Les changemens qui ſe font dans le poids & la chaleur de l'atmoſphere, &c.

Ce ſont ces raiſons & d'autres qui déterminerent M. Sauveur à chercher par une autre méthode à fixer le ſon. On peut voir de

quelle maniere il s'y prit, dans l'Hiſtoire de l'Acad. ann. 1700, pag. 137, & quel fut ſon ſuccès. Lorſque M. Sauveur communiqua ſes vues à l'Académie, on penſa d'abord, dit M. de Fontenelle, à s'aſſurer des expériences ſur leſquelles il fondoit la détermination du ſon fixe, & des Commiſſaires furent nommés à cet effet. Monſieur Sauveur en rendit compte lui-même, & avoua que pour cette fois elles n'avoient pas réuſſi. La difficulté de les recommencer, l'appareil qu'il faut pour cela, furent cauſe qu'on en demeura là. Soit donc qu'il y eût de l'incertitude dans la méthode de M. Sauveur, ou

beaucoup de difficulté à s'en ſervir, le petit tuyau prévalut, & continua de donner le ton dans la Chapelle & dans l'Opéra.

Cependant les objections qu'on peut faire contre cet inſtrument ſont ſolides, & je ne doute nullement qu'en l'employant ſans précaution, il ne donne en différentes contrées, & dans un même lieu ſous différentes températures de l'air, le ton ou un peu plus haut ou un peu plus bas. Mais n'y auroit-il pas moyen d'obvier aux altérations qui ſurviennent, ſoit dans la matiere de l'inſtrument, ſoit dans le poids tendant ou dans l'atmoſphere? C'eſt ſur quoi je vais communiquer mes conjectures.

J'ai décrit plus haut la construction du ton tel que nous l'employons aujourd'hui, voici comment je désirerois qu'on le corrigeât.

Je voudrois qu'il fût composé de deux parties mobiles, en vertu desquelles il pût s'alonger ou s'accourcir. Car après cela, il ne s'agiroit plus que de savoir quand & de combien précisément il faudroit l'allonger ou l'accourcir, pour lui conserver le même son.

Pour parvenir à cette connoissance, revoyons les causes qui produisent de l'altération dans le ton, tel que nous l'avons. S'il n'y en a que trois, & que nous

puiſſions prévenir l'une & calculer les effets des deux autres, il ne ſera pas difficile de conſerver le même ſon au ton compoſé de deux parties mobiles.

L'altération de l'atmoſphere quant au poids ; ſon altération quant à la chaleur, & les changemens que ces deux cauſes occaſionnent dans la matiere de l'inſtrument, ſont les trois inconvéniens auxquels il faut remédier.

On remédiera au dernier en donnant au ton une extrême épaiſſeur relativement à ſa longueur, & en le conſtruiſant du métal ſur lequel le froid & le chaud font le moins d'impreſſion.

Cette précaution eſt d'autant plus ſûre, qu'il n'y a que le changement dans la longueur d'un tuyau qui en rende le ſon plus ou moins aigu, ainſi que l'expérience nous l'apprend & que nous l'avons trouvé par le calcul.

Pour ce qui regarde la température de l'air, le Thermometre indiquera les viciſſitudes de l'état de l'atmoſphere quant à la chaleur; & le Barometre, ſes altérations quant à ſa peſanteur. Il ne ſeroit plus queſtion que de graduer le tuyau mobile, eu égard aux effets de ces deux cauſes, pour le même lieu, & eu égard aux mêmes effets & au poids du mercure, pour deux différens lieux de la Terre.

Des expériences réitérées apprendroient ce que la premiere, ou les viciſſitudes de l'état de l'atmoſphere quant à la chaleur, produiſent ſur le ſon; & le moyen de faire ces expériences, ce ſeroit d'avoir deux monocordes à l'uniſſon, & de les placer en deux endroits où la chaleur de l'air fût fort différente, & aſſez voiſins pour qu'on pût les entendre en même temps & comparer les ſons qu'ils rendroient.

Le calcul donneroit exactement les effets de l'altération de l'atmoſphere quant à ſon poids. Car connoiſſant la plus grande & la plus petite hauteur du vif-argent dans le Barometre, on trouveroit

aiſément le ton pour ces grandes & petites hauteurs & pour toutes les intermédiaires, & par conſéquent la quantité préciſe dont il faudroit alonger ou accourcir l'inſtrument d'un moment à l'autre, pour lui conſerver le même ſon.

Quand à l'aide de l'expérience & du calcul, on auroit gradué un tel inſtrument, je crois qu'on pourroit ſe promettre d'exécuter un Concert dans dix ans & à mille lieues ſur le même ton qu'on l'auroit exécuté aujourd'hui à Paris. On n'auroit pour cela qu'à ſavoir quelles étoient les hauteurs du Barometre & du Thermometre à Paris; & conſulter ailleurs ou dans un autre

temps, les mêmes machines pour en apprendre de combien il seroit à propos d'alonger ou d'accourcir le ton gradué ; à moins qu'il ne fallût le laisser au même degré, ce qu'elles diroient aussi. Si le Thermometre demandoit qu'on l'alongeât d'une partie, & le Barometre d'une autre, on l'alongeroit de deux, & ainsi pour toute autre supposition.

Il n'y a plus que l'inspiration plus ou moins forte qui pût tromper l'attente. Mais quiconque sait emboucher un instrument, ménagera son haleine de maniere à ne pas faire sauter le ton ; ce qui suffira ; car il n'importe aucunement qu'il soit plus ou moins fort. Il ne s'agit que de

ne point occaſionner de ſauts à l'inſtrument ; ce qui eſt toujours facile.

RÉSULTAT.

Pour avoir le ſon fixe, il faut donc conſtruire un inſtrument de deux parties mobiles, d'un métal ſur lequel le froid & le chaud faſſent le moins d'impreſſion.

Anéantir cette impreſſion par l'épaiſſeur conſidérable que l'on donnera au tuyau relativement à ſa longueur.

Graduer ce tuyau ſur les altérations qui ſurviennent dans le poids tendant ou dans la peſanteur de l'atmoſphere, à l'aide du calcul & du Barometre.

Corriger cette premiere gra-

duation par les expériences que nous avons indiquées ſur les effets de la chaleur, dont le Thermometre indiquera la quantité.

Cette préparation ſuffit pour un même lieu de la Terre; mais il faudra encore avoir égard à la peſanteur du mercure pour deux lieux différens.

OBJECTION.

Ce ſyſtême de la graduation d'un tuyau composé de deux parties mobiles, ſuppoſe, me dira-t-on, que la différence qui ſurvient dans le poids tendant, à l'occaſion des viciſſitudes de l'atmoſphere, influe ſenſiblement ſur la longueur du tuyau. Car ſi la quantité dont il faudroit

l'alonger ou le raccourcir pour le conserver au même ton, étoit peu considérable, la graduation pourroit devenir impraticable, & l'expédient proposé pour la fixation du son, se réduire à rien.

RÉPONSE.

Ce raisonnement est juste, & je conviens que la graduation du tuyau est impossible, si la différence qui survient dans le poids tendant ou dans la pesanteur de l'atmosphere n'influe pas sensiblement sur la longueur du tuyau. Mais l'effet de cette différence est considérable; car selon la température de l'air, il y a tel tuyau qui rend des sons qui sont entr'eux dans la raison des nom-

bres 840714, 960771, ou dans le rapport de 8 à 9, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus ; ce qui prend plus d'un demi-pied sur la longueur entiere d'un tuyau de pieds.

Or quel inconvénient y auroit-il à se servir d'un tuyau de cette longueur pour fixer le son On auroit donc alors l'espace de plus d'un demi-pied à graduer or cet espace est considérable pour admettre un très-grand nombre de divisions & promettre dans la fixation du son toute l'exactitude qu'on peut désirer

Fin du premier Mémoire.

SECOND

Fig. 3

p t P i A O t T G

Fig. 4.

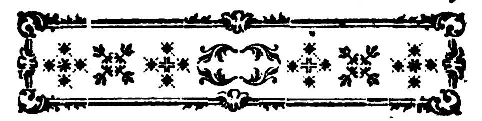
R Q p q m n A S R

C Fig. 8. D A N

A G G

Fig. 7. C B

B C Fig. 9. D C F B



SECOND MÉMOIRE.

Examen de la développante du Cercle.

LES Géometres ont distingué des courbes de deux especes, des courbes géométriques & des courbes mécaniques.

Ils entendent par une courbe géométrique celle dont la nature est exprimée par une équation qui ne contient que des quantités finies ; & par une courbe mécanique celle dont la nature ne peut s'exprimer que par une équation qui contienne des différences.

Ils ont ensuite considéré les courbes géométriques relativement au plus grand exposant de l'abscisse ou de l'ordonnée ; ou plus généralement, relativement à la dimension du produit le plus grand que forment les variables, soit séparées, soit mêlées ensemble, dans les équations qui expriment la nature de ces courbes; & ils en ont fait différens genres selon ce plus haut exposant de l'abscisse & de l'ordonnée, ou selon cette dimension du plus grand produit que forment les variables, soit séparées, soit mêlées.

Ainsi ils ont appellé courbes du second genre, celles dont la

nature eſt exprimée par des équations où 2 eſt le plus haut expoſant de l'abſciſſe x, ou de l'ordonnée y, ou par des équations dans leſquelles xy produit de deux dimenſions eſt le plus haut qui s'y rencontre : de même que, ſelon eux, les courbes du troiſieme genre, ſont celles dont la nature eſt exprimée par des équations où 3 eſt le plus haut expoſant de l'abſciſſe x, ou de l'ordonnée y, ou par des équations dans leſquelles il ne ſe rencontre point de plus haut produit, que xyy ou xxy de trois dimenſions, & ainſi de ſuite.

Je n'ai garde de traiter ces diſtinctions d'arbitraires ; elles

ſont fondées dans la nature des choſes. Il y a en effet des courbes dont l'équation contient néceſſairement des différences, & d'autres dont l'équation n'en contient point ; des courbes dont la nature s'exprime par une équation où le plus haut produit des variables n'eſt que de deux dimenſions, & d'autres dont la nature s'exprime par une équation où ce produit eſt de trois, quatre, cinq, &c. dimenſions.

Mais je crains bien qu'on n'ait eu trop d'égard à ces diſtinctions, & que par je ne ſais quelle délicateſſe on n'ait pas fait des courbes mécaniques autant d'uſage qu'on auroit pu, & qu'on n'ait

attaché une élégance imaginaire à n'employer dans la construction des équations qu'une courbe d'un certain genre, dans des cas où une courbe d'un genre supérieur satisfaisoit également, & se traçoit avec plus de facilité.

Cependant Newton & Leibnitz, dont l'autorité étoit assez grande en Mathématiques pour entraîner le reste des Géometres, ont reconnu, il y a longtemps, que les courbes géométriques d'une construction simple devoient être préférées dans la solution des Problêmes à des courbes d'une équation moins compliquée, mais d'une cons-

truction plus difficile ; & c'eſt par cette ſeule raiſon que tous les Géometres abandonnent unanimement la parabole pour le cercle, ſans en excepter Deſcartes, qui, perdant ailleurs de vue la facilité de la deſcription, prononce généralement que dans les conſtructions des équations, il faut bien ſe garder d'employer une courbe d'un genre ſupérieur, quand celle d'un genre inférieur ſuffit.

Mais pourquoi n'en ſeroit-il pas des courbes mécaniques, lorſqu'elles ſont faciles à décrire, ainſi que des courbes géométriques qui ont cet avantage ? Cette queſtion eſt d'autant plus

ſondée que la deſcription d'une ligne géométrique quelconque, même du cercle & de la ligne droite, eſt une opération mécanique & toujours ſujette à erreur, mais que la Géométrie ſuppoſe exacte.

Cette ſcience n'auroit-elle de l'indulgence que dans ces deux occaſions ? Si l'on augmentoit le nombre de ſes inſtrumens d'un nouveau compas qui fût d'un uſage auſſi ſûr & auſſi exact que celui dont on ſe ſert pour tracer le cercle, & qui facilitât un grand nombre d'opérations, ſeroit-elle bien fondée à le rejeter ?

Si deux branches de cuivre

ou d'acier ſont aſſemblées fixement en un point, & que l'extrémité de l'une tourne autour de l'extrémité de l'autre, la premiere tracera ſur un plan une courbe fort connue.

Si vous enveloppez un cercle de cuivre ou d'acier d'une chaîne fort mince; l'extrémité de cette chaîne tracera, ſoit en s'enveloppant, ſoit en ſe développant, une courbe dont perſonne, à ce que je crois, n'a encore recherché les propriétés.

Le premier de ces inſtrumens eſt un compas ordinaire, & la courbe tracée eſt un cercle: le ſecond eſt le compas que je

propoſe, & la courbe tracée ſera la développante du cercle.

Or conçoit-on que l'un ſoit plus ſimple que l'autre, & que la deſcription du cercle puiſſe être plus facile & plus rigoureuſe que celle de ſa développante.

C'eſt la facilité qu'on a de tracer cette développante, & la multitude des cas où ſa deſcription peut avoir lieu qui m'ont déterminé à en examiner les propriétés. Je ſouhaite que le peu que j'en ai découvert, engage, ſinon les Géometres, du moins les faiſeurs d'inſtrumens de Mathématiques à s'en ſervir. C'eſt en leur faveur que j'ai

laissé dans ce Mémoire quelques Problêmes que j'en aurois bannis, si je n'avois écrit que pour les Savans.

PROBLÊME I.

Diviser un arc de cercle AFB (Fig. 1.) *en une raison quelconque commensurable ou incommensurable. Soit, par exemple, proposé de trouver le point* F, *tel que* AF *soit à* FB *comme* 1 *à* $\sqrt{5}$.

SOLUTION.

Tracez la dévelopante *ADE*, tirez de l'extrémité *B* de l'arc donné la tangente *BGE*; divisez cette tangente au point *G* en

deux parties qui ſoient entr'elles dans la raiſon donnée de 1 à $\sqrt{5}$. Décrivez du rayon *CG*, l'arc *GD* qui rencontre la développante en *D*. Achevez ſur *CD*, qui eſt égale à *CG*, le triangle *CDF* entiérement égal au triangle *CBG*. Je dis que le point *F* eſt le point cherché.

DÉMONSTRATION.

Le triangle *DFC* étant tout-à-fait égal au triangle *CBG*; le côté *DF* touche le cercle en *F*; donc par la nature de la développante, il eſt égal à l'arc *AF*; il eſt de plus égal au côté *BG* du triangle *CBG*. Mais la ligne entiere *BGE* eſt

égale à l'arc entier AFB. Donc la partie BF de cet arc est égale à GE.

$DF = BG = AF$ & $BF = GE$. Mais $BG . GE :: 1 . \sqrt{5}$. Donc $AF . FB :: 1 \sqrt{5}$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

On a donc par le moyen de cette développante, celui d'inscrire dans un cercle, tel polygone régulier ou irrégulier qu'on désirera.

PROBLÊME II.

Trouver un secteur [illegible] *cercle* ACD *égal à un espace quelconque donné* ab, Fig. 2.

SOLUTION.

Je fais $a . CD :: x . b$. & j'ai $x = \frac{ab}{CD}$. Je tire enſuite une tangente indéterminée au cercle donné. Je prends ſur cette tangente la partie $DE = \frac{ab}{CD}$. Je décris avec l'inſtrument que j'ai propoſé la développante *AE* qui paſſe par le point *E*. Je dis que le double du ſecteur *ACD* eſt égal à l'eſpace donné *ab*.

DÉMONSTRATION.

Le ſecteur $ACD = \frac{AD \times CD}{2}$. Mais $DE = AD$. Donc le ſecteur $= \frac{DE \times CD}{2}$. Subſtituez à

DE ſa valeur $\frac{ab}{CD}$, & il vous viendra le ſecteur $= \frac{ab}{2}$. Donc le double du ſecteur $= ab$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME III.

Trouver un eſpace rectiligne égal au ſecteur extérieur quelconque AHB. Fig. 3.

Solution.

Prolongez le côté *HA* en *F* où ce côté ſoit rencontré par la ligne *BCF* qui part du point *B* & qui paſſe par le centre *C* du cercle. Prolongez cette ligne *BCF* en *I*. Tirez les perpendiculaires *HI* & *AL*. Tracez

du point A la développante AE, & tirez la tangente BE. Je dis que l'eſpace $ABH = \frac{FB \times HI}{2} - \frac{FC \times FA \times HI}{2FH} - \frac{BC \times BE}{2}$.

DÉMONSTRATION.

La ſurface du triangle $FBH = \frac{FB \times HI}{2}$. Mais $FH . HI :: FA . AL = \frac{FA \times HI}{FH}$. Donc la ſurface du triangle $FAC = \frac{FC \times FA \times HI}{2FH}$. Donc l'eſpace $ACBH = \frac{FB \times HI}{2} - \frac{FC \times FA \times HI}{2FH}$. Mais l'eſpace $ACB = \frac{BC \times BE}{2}$.

Donc l'eſpace $ABH = \frac{FB \times HI}{2} - \frac{FC \times FA \times HI}{2FH} - \frac{BC \times BE}{2}$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME IV.

Trouver par le moyen de la développante AE *un eſpace rectiligne égal au ſegment* AQF. Voyez Fig. 4.

Solution.

Prenez ſur la tangente EF la ligne $EK =$ au ſinus AB. Je dis que le triangle CFK eſt égal au ſegment AQF.

DÉMONSTRATION.

Le triangle $CFK \doteq \frac{CF \times FK}{2}$ $= CF \times \frac{FE - EK}{2} = \frac{CF \times \text{arc} AQF}{2}$ $= \frac{CF \times AB}{2} =$ au ſecteur $ACFQ$ — le triangle $ACF =$ au ſegment AQF. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME V.

Trouver un eſpace rectiligne égal à une portion quelconque AFB *du ſegment circulaire*, AB *étant perpendiculaire ou non à* FC. Voyez Fig. 4.

SOLUTION.

Ayant mené du point B la perpendiculaire BD sur AC, on prendra sur la tangente EF, la partie $EV = BD$, & ayant joint VC, on aura le triangle $CFV =$ à l'espace $AQFB$.

DÉMONSTRATION.

$CFV = \frac{CF \times FV}{2} = CF \times \frac{FE - EV}{2} = \frac{CF \times \text{l'arc } AQF}{2} - \frac{CF \times BD}{2} = \frac{CF \times \text{l'arc } AQF}{2} - \frac{CA \times BD}{2} =$ au secteur $AQFC$ $-$ le triangle $ABC =$ l'espace

curviligne *AQFB*. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME VI.

Trouver une ligne droite égale à une portion quelconque AEG *de la développante du cercle.*

SOLUTION.

Soient (*Fig. 5.*) du point *E* la tangente *EF* & la perpendiculaire *EO* à *CE*; que cette perpendiculaire ſoit rencontrée en *O* par la ligne *CF* prolongée, & qui paſſe par le point de contengence *F*. Je dis que l'arc *AEG* eſt égal à la moitié de la ligne *FO*.

DÉMONSTRATION.

Ayant tiré la tangente ef infiniment proche de EF, & nommé CA ou CF, a ; l'arc AF, x ; l'élément Ff, dx. Les ſecteurs ſemblables CFf, Eef donneront CF, a. fF, dx :: EF, x. $Ee = \frac{xdx}{a}$, & intégrant on aura $AE = \frac{xx}{2a}$. Mais à cauſe des triangles rectangles ſemblables CFE, FEO ; on a CF, a. FE, x :: FE, x. $FO = \frac{xx}{a}$. Donc $FO = 2AE$ ou $AE = \frac{FO}{2}$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME VII.

Trouver un eſpace rectiligne égal à l'eſpace AFEG. Voyez Fig. 5.

Solution.

Je dis que l'eſpace *AFEG* eſt égal au tiers du triangle *EFO*.

Démonstration.

Le ſecteur élémentaire *Efe* $= \frac{Ee \times EF}{2} = \frac{xxdx}{2a}$, par la propoſition précédente, dont l'intégrale donne l'eſpace *AFEG* $= \frac{x^3}{2.3a}$. Mais le triangle *EFO*

$= \frac{EF \times FO}{2} = \frac{x^3}{2a}$. Donc l'efpace $AFEG = \frac{1}{3}$ du triangle EFO. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Si l'on prend $FK = \frac{1}{3} FO$, & qu'on tire EK. Je dis que le triangle CEK fera égal à l'efpace mixtiligne $CAGEF$.

Car $EFK = AGEF$ & $CFE = CABF$. Donc $CABF + AGEF$ ou l'efpace mixtiligne $CAGEF = CFE + EFK$ ou CEK.

COROLLAIRE II.

Si on retranche des efpaces CEK, $CAGEF$, la partie

commune CEF, on aura $CAGE = EKF = \frac{1}{3} FEO = AGEF$.

Ce que l'on peut démontrer encore en cette ſorte. $CEF = CABF$. Donc en ôtant la partie commune CBF, reſte $BEF = CBA$, & ajoutant de part & d'autre $BAGE$, on a $CAGE = AGEF$.

Corollaire III.

Si l'on avoit la rectification d'un arc de cercle quelconque, la développante donneroit la quadrature du cercle. Parce que faiſant de la ligne droite une tangente au cercle, à l'extrémité de l'arc auquel elle ſeroit égale, l'autre extrémité de cet

arc feroit l'origine de la développante. Or on va voir qu'un point de la courbe étant donné avec fon origine, on a la quadrature du cercle.

COROLLAIRE IV.

Si le point *E* de la développante, la rectification de la partie *AE*, la quadrature de l'efpace *CAE* étant donnés, on peut trouver l'origine *A* de la courbe, on aura la quadrature du cercle, car *FA* fera toujours égale à *FE*.

COROLLAIRE V.

Si l'on peut trouver la quadrature du fegment *AGE*; la ratification

ratification de la partie de la courbe *AGE*, le point *E* de la courbe, la quadrature de l'eſpace *CAGE*, étant donnés ; ſans ſuppoſer l'origine de la courbe donnée, on aura bientôt cette origine ; car ôtant de l'eſpace quarrable *CAGE*, l'eſpace *AGE*, il reſtera la ſurface du triangle *CAE*, dont les deux côtés *CA*, *CE* ſont donnés de longueur, le côté *CE* de poſition, & le lieu du ſommet *A* dans la circonférence du cercle. Mais par le Corollaire précédent, ſi l'on a l'origine de la courbe *A* & le point *E*, on a la quadrature du cercle.

PROBLÊME VIII.

L'origine de la développante AE *étant donnée, avec un de ſes points* E, *trouver ſes autres points.* Fig. 6.

SOLUTION.

Tirez du point *E* la tangente *FE*. Diviſez l'arc *AF* en un certain nombre de parties égales *Aa*, *aa*, *aa*, &c. Diviſez la tangente *FE* en un même nombre de parties égales. Prenez l'arc *Ff* = une des parties égales de l'arc *AF*. Tirez la tangente *fe*. Prenez *fe* = *FE* + une des parties égales de *FE*. Je dis que l'extrémité *e* de la ligne

fe appartiendra à la développante.

DÉMONSTRATION.

Il eſt évident que chaque partie de la tangente *FE* eſt égale à chaque partie *Aa* de l'arc *AF*; donc ſi l'on augmente l'arc *AF* d'une partie égale aux précédentes, il faudra pareillement augmenter la tangente *FE* d'une partie égale à une de celles dans leſquelles on l'a diviſée, pour avoir une ligne *fe* qui ſoit toujours égale à l'arc *Af*, & qui étant ſuppoſée tangente en *f*, ait ſon extrémité dans la développante.

PROBLÊME IX.

Deux points E, E, (Fig. 6.) *de la développante étant donnés, trouver les autres.*

Solution.

Tirez les tangentes *EF*, *fe*; prenez l'arc $Fa = Ff$. Tirez la tangente *aE*. Il eſt évident qu'il doit y avoir la même différence de *aE* à *FE*, que *FE* à *fe*.

On peut encore diviſer l'arc *Ff* en un certain nombre de parties égales, & partager la différence de *fe* à *FE* en un même nombre de parties égales. On voit, ſans qu'il ſoit beſoin de le démontrer, qu'en faiſant

Fa égale à une des parties de l'arc *Ff*, & *aE* égale à *FE* moins une des parties de la différence de *fe* à *FE*; l'extrémité de *aE* appartiendra à la développante.

PROBLÊME X.

Trouver le centre de gravité d'un arc circulaire AF. Voyez Fig. 7.

SOLUTION.

Tirez la ligne *CP* qui divise l'arc *AF* par la moitié. La tangente *PO* & le sinus *AV*. Joignez *CO*, & menez *AI* parallele à *CP* & *IG* parallele à *OP*. Je dis que le point *G*

ſera le centre de gravité de l'arc.

DÉMONSTRATION.

Les Géometres ſavent que le centre de gravité G, d'un arc APF doit être ſur la ligne CP, à une diſtance du centre C, telle que $CP \times AV = CG \times AP$. C'eſt-à-dire, que CG ſoit à CP comme AV à l'arc AP ou à la tangente PO. Or c'eſt ce que donne la conſtruction précédente. Car on a les triangles ſemblables CPO, CGI, & par conſéquent $CG.CP :: GI.PO ::$ $AV.PO$. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Soit *M* le centre de gravité du ſecteur *C A F*. On ſait que $CM = \frac{2}{3} CG$. Ainſi ayant le centre de gravité *G* de l'arc, par le moyen de la développante *A O*, on aura facilement celui du ſecteur.

PROBLÊME XI.

Conſtruire une équation cubique de cette forme $x^3 = px = \pm q$; *où le cube de* $\frac{p}{3}$ *eſt ſuppoſé plus grand ou non moindre que le quarré de* $\frac{q}{2}$. *Cette conſtruction demande quelques préparations par leſquelles nous allons commencer.*



LEMME I.

Dans tout quadrilatere inſcrit, le rectangle fait des diagonales, eſt égal à la ſomme des deux rectangles faits des deux côtés oppoſés. Ainſi (Fig. 8.) *je dis que dans le quadrilatere* ABCD, AC × BD = AB × CD + AD × BC.

DÉMONSTRATION.

Tirez la ligne *AE*, de maniere que l'angle *BAE* ſoit égal à l'angle *CAD*, & que vous ayez par conſéquent l'angle *CAB* = *EAD*. Mais les angles *ABE* & *ACD* ſont égaux, de même que les angles

ADE & *ACB*, parce que les deux premiers, de même que les deux ſeconds, ſont appuyés ſur le même arc. Donc les triangles *ABE* & *ACD*, & les triangles *ADE* & *ACB* ſont ſemblables.

Les deux premiers donnent $AB.BE :: AC.CD.$

Les deux ſeconds donnent $AD.DE :: AC.CB.$

Donc $AB \times CD = AC \times BE$, & $AD \times CB = AC \times DE$. Et $AC \times DE + AC \times BE = AB \times CD + AD \times CB$. Ou $AC \times \overline{BE + DE} = AB \times CD + AD \times CB$. Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME II.

Si l'on inscrit dans un cercle (Fig. 9.) *un triangle équilatéral* ACB, *& que l'on tire d'un de ses angles* A *la ligne* AE, *& du point* E *les cordes* CE, EB; *je dis que la corde* AE *sera égale à la somme des deux cordes* CE, BE.

DÉMONSTRATION.

Par le Lemme précédent, $AE \times BC = EC \times AB + AC \times EB$. Mais par supposition, les côtés du triangle sont égaux; donc en les ôtant des deux membres de l'équation, on aura $AE = BE + EC$. Ce qu'il falloit démontrer.

LEMME III.

Soit ABCD, (Fig. 10.) *un arc d'un cercle donné dont le diametre est* AF, AB *le tiers de cèt arc;* AD *la corde donnée de l'arc entier; trouver la valeur de la corde de l'arc* AB.

Prenez l'arc BC = l'arc BA. Faites de l'extrémité F du diametre les arcs FE, FG = l'arc AB. Tirez les cordes AB, BC, CD, AC, AD, BD, & AE, EF, FG, EG. Nommez le diametre AF, $2a$; la corde donnée AD, $2b$; la corde AB & ses égales x, la corde AC & ses égales y.

A cause du triangle rectangle AEF, on a $\overline{AE}^2 = 4aa - xx$. & AE ou $AG = \sqrt{4aa - xx}$. Mais les deux figures à quatre côtés $ABCD$ & $AEFG$, donneront par le Lemme 1. $yy = xx + 2bx$ & $2ay = \sqrt{4a^2 - x^2} \times 2x$, d'où l'on tire $yy = \frac{4aaxx - x^4}{aa}$. Donc $\frac{4aaxx - x^4}{aa} = xx + 2bx$, ou $x^3 - 3aax = -2aab$.

COROLLAIRE.

La corde AB est donc une des racines affirmatives de l'équation $x^3 - 3aax = -2aab$,

& la corde de la troisieme partie de l'arc qui est de l'autre côté de AD, l'autre racine positive de l'équation. Car on trouve la même chose, soit que x signifie le tiers de l'un de ces arcs ou le tiers de l'autre. Ce qui paroîtra en appliquant le même raisonnement à l'autre arc.

Il faut seulement remarquer que la quantité positive b ne peut surpasser a; car si $2b >$ $2a$; alors la corde AD sera plus grande que le diametre.

Cela posé, je passe à la solution du Problême que je me suis proposé, savoir de construire l'équation $x^3 - px = \pm q$.

SOLUTION.

Je commence par transformer la proposée en $x^3 - 3aax = \pm 2aab$, en substituant aa à $\frac{p}{3}$, & $2a^2b$ à q. J'observe après la transformation que $\frac{p^3}{27}$ étant plus grand par supposition que $\frac{qq}{4}$; a^6 sera plus grand que a^4bb, aa que bb, & a que b.

Je décris ensuite (*Fig.* 11.) un cercle du rayon a. Je tire la corde $AD. = 2b$. Je trace la développante AE. Je mene la tangente DE que je partage en trois parties égales ; du centre O & du rayon OG, je décris l'arc de cercle GF ; je construis sur

$OF = OG$ le triangle OBF tout-à-fait égal au triangle ODG. Donc $BF =$ l'arc AB, & $AB = \frac{1}{3} AD$.

Je prends $BC = AB$; CD sera donc égale à AB; du point B & du côté BH, j'inscris le triangle équilatéral BHK, & je tire les cordes AB, HA, AK. Je dis qu'elles seront les trois racines de l'équation $x^3 - 3aax = \pm 2aab$.

DÉMONSTRATION.

Il est évident par le dernier Lemme, que si AB est la corde du tiers de l'arc AD, elle sera une des racines positives de l'é-

quation $x^3 - 3aax = -2aab$. Et que la corde de la troisieme partie de l'arc *AKHD* sera l'autre racine positive de la même équation. Mais il n'est pas moins évident par la nature de la développante, que l'arc *AB* est le tiers de l'arc *AD*.

Et voici comment je démontre que *AK* est le tiers de l'arc *AKHD*.

L'arc *ABCD* + l'arc *AKHD* = la circonférence. Mais l'arc *AB* + l'arc *AK* sont égaux pris ensemble au tiers de la circonférence. D'ailleurs l'arc *AB* est égal au tiers de l'arc *ABCD*. Donc l'arc *AK* est égal au tiers de l'arc *AKHD*.

Donc ces deux cordes ſont les racines poſitives de l'équation propoſée, & leur ſomme la troiſieme racine, en changeant le ſigne, parce que le ſecond terme de l'équation manque. Mais, Lemme 2. $AH = AB + AK$. Donc AH eſt la troiſieme racine.

Donc AB, AK, $-AH$ ſont les trois racines de $x^3 - 3aax = -2aab$. Et AB, $-AK$, $-AH$ les trois racines de $x^3 - 3aax = +2aab$.

Donc j'ai trouvé les trois racines de l'équation $x^3 - 3aax = \pm 2aab$. Donc j'ai conſtruit l'équation propoſée $x^3 - px = \pm q$.

Remarque.

Nous avons trouvé pour l'expreſſion de la corde du tiers d'un arc, une équation du troiſieme degré. Il paroît cependant au premier coup d'œil que le Problême ne devroit avoir qu'une ſolution ; car il n'y a certainement qu'une ſeule & unique valeur poſſible de la corde *A C* qui ſous-tend le tiers de l'arc *A B*. Mais on remarquera que l'équation algébrique à laquelle nous ſommes parvenus, ne renferme point les arcs *A B*, *A C*, mais ſeulement leurs cordes ; & que par conſéquent x n'eſt pas ſimplement la corde du tiers de l'arc

ACB, mais la corde du tiers de tout arc qui a AB pour corde. Or tous les arcs qui ont AB pour corde, sont en nommant c la circonférence, les arcs ACB, $ACB + c$, $ACB + 2c$, $ACB + 3c$, $ACB + 4c$, $ACB + 5c$, &c. Et $c - ACB$ ou ADB, $2c - ACB$, $3c - ACB$, $4c - ACB$, &c. Fig. 12.

Or je dis que la division de tous ces arcs en 3, fournit 3 cordes différentes, & jamais plus de 3.

Car, 1°. soit le tiers de l'arc $ACB = z$, le tiers de l'arc $ACB + c = y$, le tiers de l'arc $ACB + 2c$, $= u$. Cela

donnera 3 arcs différens qui auront chacun leurs cordes. Voilà donc trois cordes différentes, & par conséquent les 3 racines de l'équation.

2°. Il sembleroit d'abord que le tiers des autres arcs doit avoir aussi chacun sa corde, & que par conséquent le Problême a une infinité de solutions différentes. Mais on observera que l'arc $ACB + 3c$, a pour tiers $c + z$, dont la corde est la même que celle de z; que l'arc $ACB + AC$ a pour tiers $c + y$, dont la corde est la même que celle de y; que l'arc $ACB + 5c$ a pour tiers $c + u$, dont la

corde eſt la même que celle de u ; & ainſi de ſuite.

De même on trouvera que ADB ou $c - ACB$ a pour tiers $c - u$, parce que $3c - 3u = 3c - 2c - ABC$. Or la corde de $c - u$ eſt la même que celle de u. Par la même raiſon la corde du tiers de $2c - ACB$ ſera la même que celle de y, & celle de $3c - ACB$ la même que celle de z ; & ainſi de ſuite.

Donc la diviſion à l'infini de tous ces arcs en 3, donne 3 cordes différentes, & n'en donne pas plus de trois. Voilà pourquoi le Problême eſt du troiſieme degré.

Si on divisoit un arc en 4 parties, on trouveroit une équation du quatrieme degré, & on pourroit prouver de la même maniere qu'en effet cette division donne 4 cordes différentes, & jamais davantage ; & en général, que si l'on divise l'arc *ACB* en *n* parties, la corde de la *n* partie de *nc* + *ACB* sera la même que la corde de la *n* partie de *ACB*, & que par conséquent le Problême aura *n* solutions & jamais plus. Voyez à ce sujet le Dictionnaire Universel des Sciences & des Arts, d'où j'ai tiré cet article par anticipation. Art. Trissection.

PROBLÊME XII.

Une développante quelconque AE *étant donnée, trouver par plusieurs points une autre développante* a e. Fig. 13.

SOLUTION.

Soit *CA* le rayon de la développante donnée ; *Ca* celui de la développante qu'on veut tracer. On fera *Ce*. *CE* : : *Ca*. *CA*, & le point *e* sera à la développante cherchée.

DÉMONSTRATION.

Décrivant les cercles *AF*, *af*, & tirant la tangente *EF*,

& la ligne CFf, puis joignant les points Cf, on aura par la construction $CF.Cf::CE.Ce$. Donc FE & fe sont paralleles. Donc ef touche le cercle en f. De plus $CF.Cf::EF.ef$. Donc $ef = \frac{Cf \times EF}{CF} = Cf \times \frac{arc \times AF}{CF}$ = arc af. Donc, &c. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME XIII.

Ayant les deux tangentes AG, GE *de la portion* AE, *dont l'extrémité* A *est l'origine de la courbe, trouver le cercle générateur.* Fig. 14.

SOLUTION.

SOLUTION.

En menant les perpendiculaires *AN*, *EN* ſur les deux tangentes, & prolongeant *AG* vers *M*; il eſt clair que le centre du cercle cherché ſera ſur *AM*, & que le cercle doit toucher les deux lignes *AN*, *EN* en quelque point. C'eſt pourquoi diviſant l'angle *ANO* en deux parties égales par la ligne *NC*, le point *C* ſera le centre, & *CA* le rayon.

PROBLÊME XIV.

Ayant les trois tangentes GV, VP, PF *d'une portion quelcon-*

que GEF *de la courbe, on demande le cercle générateur.* Fig. 15.

Solution.

Ayant mené les perpendiculaires *GL*, *EN*, *FM*, sur chaque tangente, la question se réduit à trouver un cercle qui touche ces trois lignes, ou en général à trouver un cercle qui touche les trois lignes données de position (*Fig. 16.*) *MVN*, *VDL*, *MLO*. Or on trouvera le centre *C* de ce cercle, en divisant en deux parties égales, les angles *V*, *L*, par les lignes *VC*, *LC*. Le centre *C* étant trouvé, la perpendiculaire *CD* sera le rayon.

THÉOREME I.

Soient décrits deux cercles concentriques à discrétion F A B, H I, (Fig. 17. 18. 19.) *soient tirées la tangente* F E *& la ligne* G I. *Soit pris l'arc* F A *à l'arc* A D; *comme* F I² — G F². G F². *Soit regardé le point* D *comme l'origine de la développante du cercle* F A B, *il arrivera de trois choses l'une, ou que cette développante passera au-dessus du point* I, *comme dans la figure 18, ou qu'elle passera au-dessous, comme dans la figure 19, ou qu'elle passera par ce point, comme figure 17.*

Je dis que, si elle passe au-dessus du point I, *on aura la qua-*

drature de la différence des espaces C & I; *que si elle passe au-dessous, on aura la quadrature de la somme de ces espaces, & que si elle passe par le point* I, *on aura la quadrature de l'espace* C.

DÉMONSTRATION.

Premier cas, Fig. 18, où la développante passe au-dessus du point I; par une proposition démontrée dans les Mémoires de l'Académie, année 1703, l'espace $A+B+C$ est quarrable. Par la nature de la développante, l'espace $A+B+I$ est quarrable. Donc l'espace $A+B+C-A, -B, -I$, ou $C-I$ est quarrable.

Second cas, Fig. 19, où la développante paſſe au-deſſous du point I; par la propoſition que j'ai citée, $A+B+C+I$ eſt quarrable. Par la nature de la développante $A+B$ eſt quarrable. Donc $A+B+C+I$, $-A$, $-B$ eſt quarrable, ou $C+I$ eſt quarrable.

Troiſieme cas, Fig. 17. $A+B+C$ eſt quarrable par la propoſition citée. $A+B$ l'eſt par la nature de la développante. Donc C eſt quarrable.

COROLLAIRE I.

C eſt quarrable dans le troiſieme cas, Fig. 17, $B+D$ l'eſt auſſi. Mais $C+B+D$ eſt égal

au secteur GHI. Donc ce secteur est quarrable.

COROLLAIRE II.

$C - I$ est quarrable dans le premier cas, Fig. 18. Mais $A + B + D + L + I$ est aussi quarrable. Donc $A + B + D + L + I + C, - I$, ou $A + B + D + C + L$ est quarrable. Mais $A + B + C$ est quarrable. Donc $D + L$ l'est aussi.

COROLLAIRE III.

$C + I$ est quarrable, second cas, Fig. 19, $A + B + D + L$ l'est aussi. Donc $A + B + D + L + C + I$ est quarrable. Donc $A + B + C + I$ l'est. Donc $D + L$ est quarrable.

COROLLAIRE IV.

Donc dans les cas où la développante, dont on suppose l'origine en *D* passe au-dessus ou au-dessous du point *I*, on a la quadrature du secteur circulaire *D* + *L*. Or dans le cas où elle passe par le point *I*, on a la quadrature du secteur *B D C*.

THÉORÈME II.

Si l'on trace un cercle A F G, *avec la développante* A E, *& un autre cercle* A f g, *dont le centre* c *soit sur une ligne qui parte du centre* C, *& qui passe par le point* *A*, *avec sa développante* A e. *Je dis que l'espace* A E e *fait des deux*

développantes & d'une partie de la ligne CEe *prolongée, est quarrable.*

DÉMONSTRATION.

L'espace *A C E* est quarrable. L'espace *A c e* est quarrable. Otant le premier du second, le reste *A E e* + *A C c* sera quarrable. Mais *A C c* est un espace rectiligne; donc l'espace *A E e* est quarrable. Ce que j'avois à démontrer.

Remarque.

Puisque l'on peut considérer une courbe quelconque comme composée d'une infinité de très-petits arcs circulaires, il s'ensuit

que tout ce que nous avons démontré du cercle & de ſa dévelоppante, l'eſt auſſi de ces petits arcs & de leurs développantes.

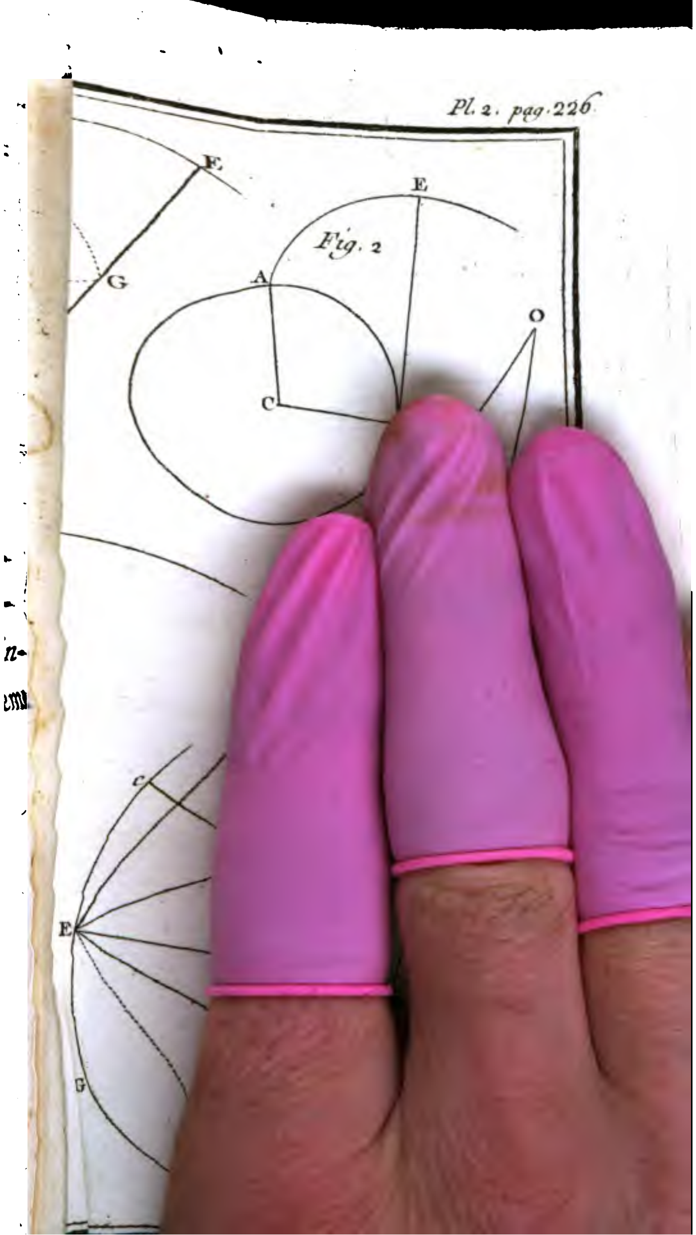
Soient donc l'arc infiniment petit *abe* d'une courbe quelconque ; *ag* ſa développante ; *ca* ſon rayon oſculateur ; *eg* ſa tangente ; & *cg* une ligne tirée du centre *c* au point *g* où la développante du petit arc eſt rencontrée par la tangente. Planche derniere de l'ouvrage, Fig. 1.

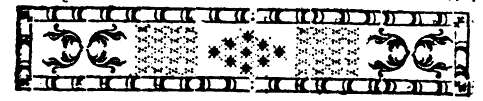
Il eſt conſtant par une des propoſitions que nous avons démontrée ci-deſſus, que l'eſpace *abeg* = l'eſpace *acbg*. Otant donc de part & d'autre l'eſpace commun *abg*, reſtera l'eſpace

abc = l'eſpace gbe. Donc ac = $\frac{gb \times be}{ab} = \frac{gb \times ae}{ab}$; car l'angle aeg étant infiniment petit, on peut ſubſtituer ae à be. Or gb eſt le ſinus de l'angle de contingence aeg, & ab ſon ſinus verſe.

Donc le rayon de la développée eſt toujours comme l'arc infiniment petit, multiplié par le rapport du ſinus de l'angle de contingence au ſinus verſe du même angle.

Fin du ſecond Mémoire.


Pl. 2. pag. 226
F
E
Fig. 2
G
A
O
C
c
E
G



TROISIEME MÉMOIRE.

Examen d'un Principe de Mécanique sur la tension des Cordes.

SI une corde *A B* est attachée à un point fixe *B*, & tirée suivant sa longueur par une force ou puissance quelconque *A*, il est certain que cette corde souffrira une tension plus ou moins grande, selon que la puissance *A* qui la tire sera plus ou moins grande. Fig. 10. Planc. dern.

Il en ſera de même, ſi l'on ſubſtitue au point fixe *B* une puiſſance égale & contraire à la puiſſance *A*, il eſt conſtant que la corde ſera d'autant plus tendue, que les puiſſances qui la tirent ſeront plus grandes.

Mais voici une queſtion qui a juſqu'ici fort embarraſſé les Mécaniciens. On demande ſi une corde *AB* attachée fixement en *B* & tendue par une puiſſance quelconque *A*, eſt tendue de la même maniere qu'elle le ſeroit, ſi au lieu du point fixe *B*, on ſubſtituoit une puiſſance égale & contraire à la puiſſance *A*.

Pluſieurs Auteurs ont écrit ſur cette queſtion que Borelli a le premier propoſée. Voici comment on peut la réſoudre, en regardant la corde tendue comme un reſſort dilaté dont les extrémités *A*, *B* font également effort pour ſe rapprocher l'une de l'autre.

Je ſuppoſe d'abord que la corde ſoit fixe en *B* & tendue par une puiſſance appliquée en *A*, dont l'effort ſoit équivalent à un poids de 10 livres; il eſt certain que le point *A* ſera tiré ſuivant *AD* avec un effort de 10 livres; & comme ce point *A*, par hypotheſe, eſt en repos, il

s'ensuit que, par la résistance de la corde, il est tiré suivant *A B* avec une force de 10 livres, & qu'il fait par conséquent un effort de 10 livres pour se rapprocher du point *B*.

Mais par la nature du ressort, le point *B* fait le même effort de 10 livres suivant *B A* pour se rapprocher du point *A*, & cet effort est soutenu & anéanti par la résistance du point fixe *B*.

Qu'on ôte maintenant le point fixe *B* & qu'on y substitue une puissance égale & contraire à *A*. Je dis que la corde demeurera tendue de même; car l'effort de 10 livres que fait le point *B*

ſuivant *B A*, ſera ſoutenu par un effort contraire de la puiſſance *B* ſuivant *B C*. La corde reſtera donc comme elle étoit auparavant.

Donc une corde *A B* fixe en *B*, eſt tendue par une puiſſance *A* appliquée à l'autre extrémité, comme elle le feroit, ſi au lieu du point *B*, on ſubſtituoit une puiſſance égale & contraire à la puiſſance *A*.

Tel eſt le principe de mécanique que je me propoſe d'examiner. La démonſtration que je viens d'en apporter eſt tirée du Dictionnaire Univerſel des Sciences & des Arts. Voyez, lorſque

cet Ouvrage paroîtra, les articles *corde*, ou *tenſion.*

Si l'on veut s'aſſurer par expérience de la vérité de ce principe; il faut attacher une corde de laiton à un point fixe; ſuſpendre à ſon autre extrémité un poids quelconque; & faire gliſſer un chevalet ſous ſa longueur, juſqu'à ce qu'elle ſoit à l'uniſſon avec une des touches d'un Clavecin. Cela fait, on laiſſera le chevalet où il eſt; & l'on ſubſtituera au point fixe, un poids égal au premier.

Il arrivera de deux choſes l'une; ou que la corde continuera d'être à l'uniſſon avec la

touche du Clavecin, ou qu'elle rendra un ſon plus aigu. Si elle rend un ſon plus aigu, la tenſion eſt plus grande avec deux poids égaux & agiſſans en ſens contraires, qu'avec un ſeul poids & un point fixe.

Le rapport des deux ſons donnera même la différence des tenſions.

Un des avantages de cette expérience, c'eſt qu'elle fournit un moyen d'apprécier les tenſions des cordes ſelon les poids qu'elles ſoutiennent ; ce que l'on auroit peut-être bien de la peine à obtenir par une autre voie.

J'envoyois dans un des Mémoires précédens au Thermometre & au Barometre pour avoir un ſon fixe, & j'envoie maintenant au Clavecin pour avoir la tenſion des cordes & la vérification d'un principe de mécanique.

Fin du troiſieme Mémoire.

QUATRIEME MÉMOIRE.

Projet d'un nouvel Orgue, sur lequel on pourra exécuter toute Piece de Musique à deux, trois, quatre, &c. parties, instrument également à l'usage de ceux qui savent assez de Musique pour composer, & de ceux qui n'en savent point du tout.

ENTRE tous les instrumens de Musique, il n'y en a peut-être aucun qui soit plus méprisé que l'Orgue d'Allemagne, & c'est

à juſte titre, car il raſſemble les défauts principaux des autres. Il a peu d'étendue, il eſt borné à un certain nombre d'airs, & l'on ne peut l'employer à l'accompagnement. Mais en revanche il ne ſuppoſe aucun talent dans celui qui en joue, & l'on ne diſconviendra pas qu'il n'y ait quelque mérite à l'avoir inventé; que le mécaniſme n'en ſoit aſſez délicat, & que, s'il n'exécute qu'un très-petit nombre de Pieces, c'eſt avec tant de préciſion, que les premiers Organiſtes de l'Europe, les Calvier & les Daquin en approchent à peine. Auſſi les perſonnes ſenſibles à l'harmonie ne peuvent-

elles quelquefois ſe défendre de lui prêter l'oreille ; la douceur des ſons, & l'exactitude de l'exécution ſuſpendant en elles le dédain qu'elles ont de l'inſtrument.

Mais c'eſt peut-être moins encore les imperfections de cet Orgue, l'uſage qu'on en fait & le peu de mérite qu'il y a à en jouer, qui l'ont avili, que les mains entre leſquelles il ſe trouve ordinairement. Le premier qui parut, fut admiré, il n'en faut point douter. Aujourd'hui que cet inſtrument eſt commun, les boëtes qui le renferment ne s'ouvrent guere que pour ſatisfaire la curioſité des

enfans émerveillés d'entendre ſortir des ſons d'un corps, qui par ſa reſſemblance extérieure à un morceau cubique de bois, ne leur paroît point fait pour cela.

Pour moi qui ne ſuis guere plus honteux & guere moins curieux qu'un enfant, je n'eus ni ceſſe ni repos que je n'euſſe examiné le premier Orgue d'Allemagne que j'entendis; & comme je ne ſuis point Muſicien, que j'aime beaucoup la Muſique, & que je voudrois bien la ſavoir & ne la point apprendre; à l'inſpection de cet inſtrument il me vint en penſée, qu'il ſeroit bien commode pour moi & pour

mes ſemblables qui ne ſont pas en petit nombre, qu'il y eût un pareil Orgue, ou quelqu'autre inſtrument qui n'exigeât ni plus d'aptitude naturelle, ni plus de connoiſſances acquiſes, & ſur lequel on pût exécuter toute Piece de Muſique.

En appuyant ſur cette idée, je ne la trouvai point auſſi creuſe que l'imaginerent d'abord quelques perſonnes à qui je la communiquai. Il eſt vrai qu'elles avoient leurs talens à défendre, & qu'au fond de l'ame elles auroient été fâchées qu'on découvrît un moyen de faire à peu de frais & dans un moment, ce qui leur avoit coûté beaucoup

de temps, d'étude & d'exercice. « Eh oui, me dirent-elles, Mon-
» sieur le paresseux. On vous
» en fera des Orgues d'Alle-
» magne qui joueront tout sans
» que vous vous en mêliez. Ne
» faudroit-il pas encore vous
» dispenser de tourner la mani-
» velle ? » Je répondis, qu'assurément cela n'en seroit que mieux; mais que j'aimois tant la Musique, que je me résoudrois à prendre cette peine, pourvu qu'on m'épargnât celle d'avoir pendant quinze ans les doigts sur un Clavecin, avant que d'exécuter passablement une Piece. Si le célebre Vaucanson, ajoutai-je, qui a fait manger & vivre

vivre un Canard de bois, & jouer de la Flûte à des Statues, se proposoit cette autre machine, je ne doute point qu'il n'en vînt à bout, & qu'on ne nous annonçât incessamment un Organiste Automate. Et pourquoi non? Seroit-ce le premier qu'on auroit vu?

De réflexions en réflexions, moitié sérieuses, moitié folâtres, car je n'en fais guere d'autres, je parvins à me demander pourquoi le carillon de la Samaritaine changeoit d'airs, & pourquoi l'Orgue d'Allemagne jouoit toujours les mêmes. Je me répondis, par rapport à celui-ci, que c'est parce que les petites pointes,

que les Artiſtes appellent notes, qui agiſſent ſur les touches, ſont immobiles ſur le cylindre ; & je conçus auſſi-tôt un autre cylindre criblé de trous artiſtement diſpoſés, dans leſquels des pointes mobiles pourroient s'inſérer, frapper les touches des tuyaux qu'on voudroit faire parler, & produire enſemble & ſucceſſivement toutes ſortes de ſons à diſcrétion.

Le méçaniſme de ce cylindre, quoique de la derniere ſimplicité, ne fut d'abord que très-embarbouillé dans ma tête ; mais en attendant que mes premieres idées ſe nettoyaſſent, je fus ſi aiſe de les avoir eues que j'en

tressaillis, & qu'il me sembla que j'exécutois déjà tout seul & sans savoir presqu'un mot de Musique, un Concert à quatre ou cinq parties. On va juger si je présumai trop de ma découverte.

Mais pour bien entendre le reste de ce projet, il faudroit tâcher de vaincre sa honte, appeller la premiere Marmotte qu'on entendra jouer de l'Orgue d'Allemagne, se faire ouvrir la boëte, & achever de lire, en donnant de temps en temps un coup d'œil sur la piece de cette machine dont on voit ici le développement.

Imaginez d'abord un cylindre

creux de quelque matiere solide, & auquel on donnera une épaisseur que l'usage qu'on en veut faire déterminera.

Que ce cylindre creux ait pour noyau un morceau de bois rond, ou un autre cylindre de bois, couvert de plusieurs doubles d'une étoffe compacte, qui forment sur lui une espece de pelote,

Que cette pelote dure remplisse exactement toute la cavité du cylindre creux.

Que ce cylindre creux soit percé de trous disposés de la maniere que je vais dire. Voyez à la fin de ce Mémoire la figure.

Les lignes verticales *sol*, 1, 2,

3, &c. *sol* ✕, 1, 2, 3, &c. *la*, 1, 2, 3, &c. ſont des projections de pluſieurs circonférences du cylindre : c'eſt ſur ces circonférences qu'on placera des notes, ou pointes mobiles ; ce qui ſuppoſe qu'elles ſeront percées de trous dans toute leur longueur.

Si ces petits trous n'étoient éloignés les uns des autres que d'une demi-ligne, on pourroit placer ſeize pointes dans un eſpace de huit lignes, & chaque pointe exprimant par ſa diſtance à celle qui la ſuit la valeur d'une double croche, on auroit pour l'intervalle d'une meſure à quatre temps, huit lignes ; pour l'inter-

valle d'une mesure à trois temps, six lignes, &c.

D'où il s'ensuit, 1°. que si le cylindre tourne sur lui-même d'une vîtesse uniforme, de la quantité 1, 8, & qu'il y ait une note, ou pointe fichée dans le premier trou de la ligne verticale *sol*, une autre dans le second trou de la verticale *D*, une autre dans le troisieme trou de la verticale *la*, une autre dans le quatrieme trou de le verticale *D*, & ainsi de suite jusqu'au seizieme trou de la seizieme verticale, on entendra successivement dans un temps donné les seize sons, *sol*, *sol D*, *la*, *la D*, *si*, *ut*, *ut D*, &c. dans

les trois quarts de ce temps donné, les douze ſons *ſol*, *ſol D*, *la*, *la D*, *ſi*, *ut*, &c. Dans la moitié du même temps, les huit ſons *ſol*, *ſol D*, *la*, *la D*, &c. Donc tous ces ſons auront été parfaitement rendus en meſure.

2°. Que ſi la pointe que j'ai placée dans le premier trou de la verticale *ſol* avoit eu de la continuité; que ſi, par exemple, elle eût couvert les huit premiers trous de cette ligne, elle eût repréſenté une blanche, & que ſi j'avois placé dans le neuvieme trou de la verticale *ut* une autre pointe qui eût couvert les huit autres trous de la meſure, laiſſant à vide les trous des autres ver-

ticales *D*, *la*, *D*, *ſi*, *D*, *re*, *D*, &c. au lieu d'entendre, dans le temps donné, pendant lequel le cylindre a tourné ſur lui-même de la quantité 1, 8, *ſol*, *D*, *la*, *D*, *ſi*, *ut*, &c. doubles croches ; on auroit ſeulement entendu *ſol* blanche ſuivi de *ut* blanche.

3°. Qu'ayant des pointes de différentes longueurs, depuis la triple ou double croche juſqu'à la ronde & par-delà pour les tenues de pluſieurs meſures, des pointes pour la triple croche pointée, la double croche, la double croche pointée, la noire, la noire pointée, la blanche, la blanche pointée, la ronde ou la

mesure, &c. Et jouissant en même temps de la commodité de les placer sous toute verticale *sol*, *D*, *la*, *D*, *si*, *ut*, &c. & dans quelqu'endroit de ces lignes qu'on désirera; on pourra faire résonner à l'Orgue tel son & de telle durée qu'on voudra; & qu'en laissant des trous à vide sur toutes les verticales en même temps, & autant de trous qu'il sera besoin; on pratiquera tous les silences possibles, depuis le plus long jusqu'au plus court. Or ces deux points comprennent toute la mélodie.

Il faut observer seulement que si l'on veut que l'Orgue rende les triples croches; quel que soit

l'intervalle ſur une verticale, ou quelle que ſoit la partie d'une circonférence du cylindre dont la verticale eſt une projection, que l'on prenne pour une meſure, il faudra percer cette partie, cet intervalle, ou cet arc de trente-deux trous.

4°. Que tandis qu'une pointe ou note placée ſur telle verticale, & couvrant autant de trous qu'on le déſirera, fera entendre tel ſon & de telle durée qu'on voudra; d'autres pointes ou notes placées ſur d'autres verticales pourront faire entendre la même quantité de ſons, & que chaque partie de cette quantité de ſons ſera plus ou moins

longue, plus ou moins aiguë à discrétion. Deux points qui comprennent toute l'harmonie.

Or la mesure, la mélodie & l'harmonie, constituent tout ce que nous entendons par Musique, & tout ce qui caractérise & différencie les Pieces.

Il n'y a donc point de Pieces qu'on ne pût jouer sur un instrument tel que celui que je viens de décrire.

5°. Que plus il y aura de verticales 1, 2, 3, &c. entre *sol* & *D*, entre *la* & *D*, entre *si* & *ut*, &c. plus le cylindre pourra contenir de morceaux de Musique différens à la fois.

6°. Que plus il y aura de verti-

cales *sol*, *D*, *la*; *D*; *si*, *ut*, &c. plus l'instrument aura d'étendue, & on pourra lui en donner autant & plus qu'au Clavecin.

7°. Que plus les verticales *sol*, 1, 2, 3, &c. *la*, 1, 2, 3, &c. seront longues, plus elles contiendront de mesures; plus les Pieces qu'on jouera pourront être longues. On peut donner à ces lignes ou à celles qu'elles représentent, ou au diametre du cylindre, assez de longueur pour qu'on y puisse noter toutes sortes de Pieces; je tiens de Monsieur Richard, le plus habile Constructeur d'Orgue d'Allemagne qu'il y ait à Paris, qu'on peut noter sur la circonférence

d'un cylindre de deux pieds de diametre plus de 120 mesures à quatre temps d'une *Allemanda largo* ; or ces 120 mesures équivalent à plus de 160 d'un *Allegro*.

8°. Qu'à l'aide des lignes 1, 2, 3, 4, 5, &c. horizontales qui passent sur une rangée de trous & qui en contiennent entre elles une autre, on connoîtra toujours facilement les endroits des verticales où les notes ou pointes qui agissent sur les touches, se placeront.

9°. Que si l'on donne au cylindre la facilité de se mouvoir de droite à gauche, ou de gauche à droite, on pourra faire

enſorte que les pointes placées ſur les verticales *ſol*, *D*, *la*, *D*, *ſi*, *ut*, &c. ne portent plus ſur ces touches, mais tombent dans l'intervalle que ces touches laiſſent entr'elles, & que ces touches ſoient frappées des pointes placées ſur d'autres verticales ; d'où il s'enſuit qu'on aura ſur le cylindre pluſieurs Pieces à la fois, & que le nombre en ſera d'autant plus grand que l'intervalle laiſſé entre les touches permettra de laiſſer entre les verticales *ſol*, *D*, *la*, *D*, *ſi*, *ut*, &c. plus d'autres verticales 1, 2, 3, &c.

10°. Qu'en notant la même Piece ſur les verticales *ſol*, *D*,

la, *D*, *ſi*, *ut*, *D*, *re*, *D*, *mi*, *fa*, *D*; on l'eſſayeroit dans tous les tons poſſibles.

Il faut pratiquer à chaque petite pointe ou note un arrêt, afin qu'en agiſſant ſur les touches, elles ne s'enfoncent pas plus qu'il ne faut.

Il n'y a pas à craindre qu'elles ſe détachent, ſi l'étoffe dont on aura couvert le cylindre intérieur & dans laquelle elles ſont fichées par leur extrémité faite en épingle, eſt ſuffiſamment compacte, & ſi l'on obſerve quand on rechange d'airs de faire un peu tourner la pelote, afin que les trous faits dans l'étoffe par les épingles, pointes,

ou notes qu'on vient de retirer, ne correſpondent plus aux trous du cylindre de cuivre.

Elles ſe détacheront d'autant moins que l'action des touches ſur elles eſt très-foible, & que d'ailleurs elle eſt oblique à leur enfoncement.

Il faut obſerver en perçant les trous, de ne laiſſer entr'eux que l'intervalle qui convient au mouvement le plus prompt ; parce que, 1°. on placera ſur une même circonférence un plus grand nombre de meſures ; 2°. qu'il vaut mieux avoir à rallentir le mouvement de la manivelle qu'à l'augmenter. On va toujours auſſi lentement,

mais non pas aussi vîte que l'on veut.

Avantages de l'Instrument proposé.

1°. Un enfant de l'âge de cinq ans pourroit savoir noter sur le cylindre le morceau le plus difficile & l'exécuter. Cela lui coûteroit moins que d'apprendre à lire par le Bureau Typographique ; car les caracteres & leurs combinaisons sont ici beaucoup moins nombreux que les lettres. Il y a vingt-quatre lettres, & il ne me faut que onze caracteres.

2°. Tout Musicien, au lieu de composer sur le papier, pourroit

compofer fur le cylindre même, éprouver à chaque inftant fes accords, & répéter fans aucun fecours toute fa Piece.

3°. Cet exercice faciliteroit extrêmement aux enfans l'étude de la Mufique, foit vocale, foit inftrumentale; car lorfqu'ils fe trouveroient vis-à-vis d'un Maître, ils auroient déjà fait pendant long-temps la comparaifon des notes fur le papier & de leur effet fur le cylindre.

4°. Ils feroient plus avancés du côté de la compofition, & ils auroient l'oreille plus faite à huit ans, qu'ils ne l'ont aujourd'hui communément à vingt,

après avoir paſſé par les mains des plus habiles Maîtres.

5°. On auroit certainement plus de plaiſir à entendre cet inſtrument qu'un Organiſte médiocre, comme la plupart le ſont, qui ne fait que balbutier ſur ſon Orgue, ne marche jamais en meſure, pratique à chaque inſtant des accords déplacés, ſe répete ſans fin, & ne répete jamais que de mauvaiſes choſes, &c.

6°. On ne ſeroit plus expoſé aux boutades d'un Muſicien, habile à la vérité dans ſon art, mais ſouvent plus habile que dévot; à qui il prendra envie de jouer à la conſécration l'*Al-*

legro le plus badin ou la *Gigue* la plus folâtre, & d'inſpirer à tout un Peuple de Fidelles la démangeaiſon de danſer devant l'Arche, au moment où c'eſt la coutume de s'incliner.

7°. Beaucoup de perſonnes qui n'ont point de voix, qui manquent d'aptitude pour un inſtrument, qui n'ont point appris la Muſique, qui l'aiment, & qui n'ont ni les moyens, ni le temps, ni la commodité de l'apprendre, pourroient toutefois s'amuſer à jouer toutes les Pieces dont ils s'aviſeroient.

8°. Cet exercice contribueroit néceſſairement aux progrès de la Muſique.

9°. On n'emploieroit à noter & à exécuter sur le nouvel Orgue, guere plus de temps qu'il n'en faut pour noter sur le papier telle Piece dont l'exécution sur le Clavecin, demanderoit des habiles, plus de temps qu'on n'en mettroit à en ranger & jouer sur le nouvel Orgue une douzaine d'autres.

10°. La difficulté de l'exécution n'empêcheroit plus de pratiquer certains tons peu usités avec lesquels cet Orgue familiariseroit, comme le *sol D*, le *la D*, &c. On pourroit composer dans tous ces tons ; ce qui fourniroit peut-être, sinon des chants, du moins des traits d'har-

monie & des expreſſions qui nous ſont inconnues.

11°. D'un moment à l'autre on pourroit hauſſer ou baiſſer une Piece d'un ton, d'un demi-ton, ou de tout autre intervalle.

12°. Les expériences ſur les ſons ſe multipliant facilement de jour en jour, & cela par des gens exercés à penſer, on pourroit à la longue en amaſſer un aſſez grand nombre, pour fonder une bonne théorie & donner des regles ſûres de pratique ; ce qui n'arrivera pas, tant que les phénomenes demeureront enſevelis dans les oreilles des Artiſtes.

13°. Un bon Orgue de cette

espece rameneroit peut-être à l'Eglise de leur Paroisse, un grand nombre d'honnêtes gens qui ont de l'oreille, & qui en ont été chassés par un mauvais Organiste.

14°. Peut-être que la facilité qu'on auroit à exécuter les Pieces les plus difficiles, empêcheroit que dans la suite on ne continuât à les prendre pour les plus belles.

Je vais maintenant passer aux inconvéniens de cet instrument, car il en a.

Inconvéniens de l'Orgue proposé.

1°. C'est un ignorant en Musique qui le propose.

2°. Il ne ſeroit plus permis aux Organiſtes d'être médiocres.

3°. On n'auroit plus beſoin de ces Maîtres d'accompagnement & de compoſition, qui ne nous preſcrivent que des regles vagues, dont un long uſage peut ſeul déterminer l'emploi.

4°. Les Maîtres à chanter garderoient la moitié moins de temps leurs écoliers.

5°. Ils ſeroient contraints d'être la moitié plus habiles, ayant à montrer à des écoliers dont l'oreille ſeroit déjà faite, qui mépriſeroient la regle de tranſpoſition, & qui demanderoient à chanter leur leçon comme ils la joueroient ſur leur Orgue.

6°. On

6°. On joueroit en quatre heures, & cela avec la derniere précision, toutes les Pieces de M. Rameau, qu'on n'apprend en plusieurs années que très-imparfaitement.

7°. Beaucoup de gens qui sont bien aises de s'amuser avec un instrument, abandonneroient le Clavecin, la Basse-de-Viole, le Violon, &c. & négligeroient l'honneur d'apprendre mal en cinq ou six années de temps, ce qu'ils pourroient exécuter parfaitement en dix jours.

8°. Nous deviendrions extrêmement difficiles sur l'exécution de la Musique instrumentale,

M



d'où il arriveroit que la plupart de ceux qui s'en mêlent en seroient réduits à se perfectionner ou à brûler leurs instrumens.

9°. Comme une Piece ne me plaît pas davantage à moi qui l'entends, soit qu'on ait employé beaucoup de temps à l'apprendre, soit qu'on l'ait aussi bien apprise en un moment, l'oreille ne faisant point de distinction, nous parviendrions peut-être à nous défaire d'un préjugé favorable à plusieurs choses fort estimées qui n'ont que le mérite de la difficulté.

Je sens toute l'importance de ces inconvéniens. J'en suis frap-

pé, & je prévois que beaucoup de gens ne manqueront pas d'en imaginer une infinité d'autres de la même force, & de me traiter moi & mon Orgue d'impertinens. Mais le désir de servir en quelque chose au progrès des Beaux-Arts, autant que je le pourrai, sans nuire aux intérêts des Artistes, auxquels je n'ai garde de le préférer, suffira pour me consoler des épithetes injurieuses que j'encourrai.

Observations sur le Chronometre.

On entend par un Chronometre, un instrument propre à mesurer le temps. On prétend

qu'il ſeroit fort à ſouhaiter qu'on eût un bon inſtrument de cette eſpece, afin de conſerver par ce moyen le vrai mouvement d'un air ; car les mots *allegro*, *vivace*, *preſto*, *affettuoſo*, *ſoavemente*, *piano*, &c. dont ſe ſervent les Muſiciens, ſeront toujours vagues, tant qu'on ne les rapportera point à un terme fixe de vîteſſe ou de lenteur dont on ſera convenu. Auſſi voit-on aujourd'hui des perſonnes ſe plaindre que le mouvement de pluſieurs airs de Lully eſt perdu. Si l'on eût eu l'attention, diſent-ils, de ſe ſervir d'un pendule pour déterminer le temps de la

mesure dans un air, & d'écrire à la tête des Pieces de Musique, au lieu de *presto*, *prestissimo*, *andante*, &c. qu'on y lit, 1, 2, ou 3 secondes par mesure, ou 5 secondes pour 1, 2, 3 ou 4 mesures, ou *m* de secondes pour *n* de mesures; on auroit évité cet inconvénient, & l'on auroit dans mille ans le plaisir d'entendre les airs admirables de Monsieur Rameau, tels que l'Auteur les faisoit exécuter de son vivant.

Ceux qui s'en tiennent à l'écorce des choses trouveront peut-être ces observations solides; mais il n'en sera pas de

même des connoiſſeurs en Muſique.

Ils objecteront contre tout Chronometre en général, qu'il n'y a peut-être pas dans un air quatre meſures qui ſoient exactement de la même durée ; deux choſes contribuant néceſſairement à ralentir les unes & à précipiter les autres, le goût & l'harmonie dans les Pieces à pluſieurs parties ; le goût & le preſſentiment de l'harmonie dans les *ſolo*. Un Muſicien qui ſait ſon art, n'a pas joué quatre meſures d'un air, qu'il en ſaiſit le caractere & qu'il s'y abandonne ; il n'y a que le plaiſir de l'har-

monie qui le ſuſpende ; il veut ici que les accords ſoient frappés, là qu'ils ſoient dérobés, c'eſt-à-dire, qu'il chante ou joue plus ou moins lentement d'une meſure à une autre, & même d'un temps & d'un quart de temps à celui qui le ſuit.

Le ſeul bon Chronometre que l'on puiſſe avoir, c'eſt un habile Muſicien qui ait du goût, qui ait bien lû la Muſique qu'il doit faire exécuter, & qui ſache en battre la meſure.

Si l'on ne joue pas aujourd'hui certains airs de Lully dans le mouvement qu'il prétendoit qu'on leur donnât, peut-être n'y

perdent-ils rien. Un Auteur n'eſt pas toujours celui qui déclame le mieux ſon ouvrage.

Mais ſi l'on ne trouve pas ces obſervations aſſez ſolides, & qu'on perſiſte à déſirer un inſtrument qui mette des bornes au caprice des Muſiciens, je commencerai par rejeter tous ceux qu'on a propoſés juſqu'à préſent, parce qu'on y a fait du Muſicien & du Chronometre deux machines diſtinctes, dont l'une ne peut jamais bien aſſujettir l'autre. Cela n'a preſque pas beſoin d'être démontré ; il n'eſt pas poſſible que le Muſicien ait pendant toute ſa Piece

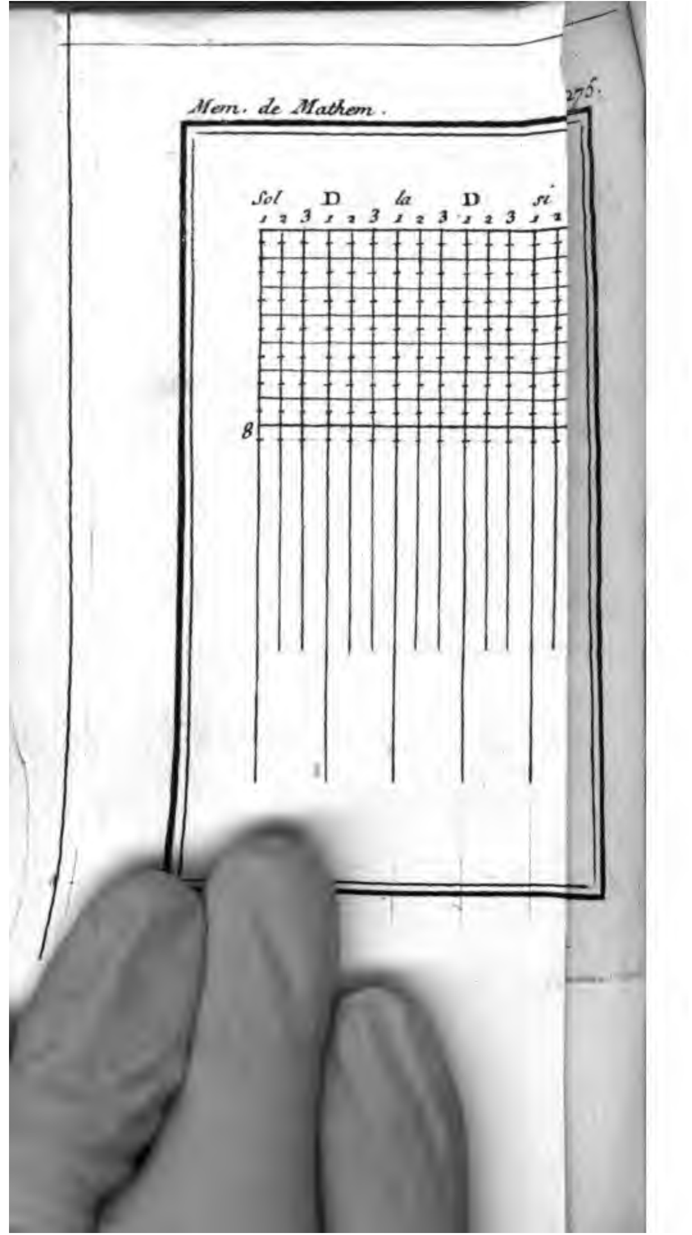
l'œil au mouvement, ou l'oreille au bruit du pendule; & s'il s'oublie un moment, adieu le frein qu'on a prétendu lui donner.

Mais comment, me demandera-t-on, faire du Musicien & du Chronometre une seule & même machine? Il paroît que cela est impossible.

Je réponds qu'il y a tout au plus quelque difficulté. Mais voici comment j'estime qu'on viendroit à bout de la surmonter; il faudroit d'abord que les Musiciens renonçassent aux signes dont ils se sont servis jusqu'à présent, & qu'ils substituassent aux *piano*, *presto*, *vivace*, *allegro*, &c.

qu'on trouve à la tête des Pieces, les temps employés à les jouer en entier ; & qu'au lieu d'écrire *giga*, *allegro*, ils écrivissent *giga*, 12, 13, 14, &c. secondes.

On noteroit ensuite cette gigue sur le cylindre de l'Orgue que je propose, & l'on appliqueroit le pendule à secondes au cylindre, de maniere que l'aiguille parcourroit 12, 13 ou 14, &c. secondes, tandis que le cylindre tourneroit sur lui-même par le mécanisme même du pendule qui lui seroit appliqué, de l'arc sur lequel la gigue entiere seroit notée.


Sol
D
la
D
si
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2
8

Je n'entrerai point dans la maniere dont cette application du pendule au cylindre peut ſe faire ; c'eſt un bon Horloger qu'il faut conſulter là-deſſus. Voici ſeulement l'énoncé du Problême qu'il faut lui propoſer à réſoudre.

Trouver le moyen de faire tourner un cylindre ſur lui-même d'une quantité donnée dans un temps donné.

Fin du quatrieme Mémoire.

CINQUIEME

MÉMOIRE,

OU

LETTRE

SUR LA RÉSISTANCE DE L'AIR

Au mouvement des Pendules.

CINQUIEME MÉMOIRE.

M * * *

Si l'endroit où Newton calcule la résistance que l'air fait au mouvement d'un Pendule vous embarrasse, que votre amour propre n'en soit point affligé. Il y a, vous diront les plus grands Géometres, dans la profondeur & la laconicité des *Principes Mathématiques* de quoi

consoler par-tout un homme pénétrant qui auroit quelque peine à entendre ; & vous verrez bientôt que vous avez ici pour vous une autre raison qui me paroît encore meilleure ; c'est que l'hypothese d'où cet Auteur est parti n'est peut-être pas exacte. Mais une chose me surprend, c'est que vous vous soyez avisé de vous adresser à moi pour vous tirer d'embarras. Il est vrai que j'ai étudié Newton dans le dessein de l'éclaircir ; je vous avouerai même que ce travail avoit été poussé, sinon avec beaucoup de succès, du moins avec assez de vivacité ; mais je n'y pensois plus dès le temps

que les RR. PP. le Sueur & Jacquier donnerent leur Commentaire, & je n'ai point été tenté de reprendre. Il y auroit eu dans mon ouvrage fort peu de choſes qui ne ſoient dans celui de ces ſavans Géometres, & il y en a tant dans le leur, qu'aſſurément on n'eût pas rencontrées dans le mien. Qu'exigez-vous donc de moi? quand les ſujets mathématiques m'auroient été jadis très-familiers; m'interroger aujourd'hui ſur Newton, c'eſt me parler d'un rêve de l'an paſſé. Cependant pour perſévérer dans l'habitude de vous ſatisfaire, je vais à tout haſard feuilleter mes paperaſſes abandonnées, conſulter les

lumieres de mes amis, vous communiquer ce que j'en pourrai tirer & vous dire avec Horace :
Si quid novisti rectius istis, candidus imperti; si non, his utere mecum.

PROPOSITION I.

PROBLÊME.

Soit (Fig. 2.) *un Pendule* M *qui décrit dans l'air l'arc* BA, *étant attaché à la verge* GM, *fixe en* G. *On demande la vîtesse de ce Pendule en un point quelconque* M, *en supposant qu'il commence à tomber du point.* B.

Soient $GM = a$. $NA = b$. $AP = x$. la pesanteur $= p$. la

résistance que l'air feroit au corpuscule *M*, s'il étoit mû avec une vîtesse *g*, $= f$. La vîtesse du Pendule au point $M = v$.

SOLUTION.

Si on suppose, avec tous les Physiciens, que la résistance de l'air & des autres fluides est comme le quarré de la vîtesse, on aura la résistance au point *M* $= \frac{fvv}{gg}$; & cette résistance agissant suivant *mM*, tend à diminuer la vîtesse *v*. De plus la pesanteur *p* tirant suivant *MQ*, on voit facilement qu'elle se décompose en deux autres forces, dont l'une qui agit suivant *MR*,

est arrêtée & anéantie par la résistance du fil ou de la verge *GM*, & dont l'autre a son effet suivant *Mm* perpendiculairement à *GM*, & est égale à $\frac{p \times MP}{GM} = \frac{p\sqrt{2ax - xx}}{a}$. Donc la force accélératrice totale qui agit au point *M* pour mouvoir le corps suivant $Mm = \frac{p\sqrt{2ax-xx}}{a} - \frac{fvv}{gg}$.

Mais le temps employé à parcourir *Mm*, $= \frac{Mm}{v}$, & l'élément ou l'accroissement de la vîtesse est égal à la force accélératrice multipliée par le temps. Donc $\left(\frac{p\sqrt{2ax - xx}}{a} - \frac{fvv}{gg}\right)$

$\times \frac{Mm}{v} = dv$. Dans cette équation, je mets au lieu du petit arc Mm, sa valeur $-\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$, avec le signe $-$, parce que v croissant à mesure que le Pendule descend, x diminue au contraire. J'ai $-pdx + \frac{fvv \times adx}{gg\sqrt{2ax-xx}}$ $= vdv$, dont l'intégrale est $\frac{vv}{2}$ $= pb - px + \int \frac{fvv \times adx}{gg\sqrt{2ax-xx}}$.

J'ai ajouté la constante pb, afin que v fût $= 0$, lorsque $x = b$, c'est-à-dire, lorsque le Pendule est au point B, d'où l'on suppose qu'il commence à descendre par sa seule pesanteur.

On remarquera d'abord dans cette équation, que si $f = 0$, c'est-à-dire, si le Pendule se mouvoit dans le vide, ou dans un milieu non résistant, on auroit $vv = 2pb - 2px$; mais comme la résistance de l'air est fort petite par rapport à la pesanteur p, la valeur réelle de vv différera très-peu de $2pb - 2px$, & l'on pourra substituer $f(2pb - 2px)$ à fvv; ce qui ne produira qu'une très-petite erreur.

Ainsi on aura $vv = 2pb - 2px + 2\int \frac{f(2pb - 2px) \times adx}{gg\sqrt{2ax - xx}}$ pour la valeur approchée de vv.

Il s'agit à présent de trouver l'intégrale du terme qui est sous

le signe $\int$, & la difficulté est réduite à intégrer $\frac{badx - axdx}{\sqrt{2ax - xx}}$.

On remarquera que cette intégrale doit être prise de telle maniere qu'elle soit $= 0$, quand $x = b$. Or l'intégrale du premier terme $\int \frac{badx}{\sqrt{2ax - xx}}$ est $b \times$ (arc $AM - AB$). Dans laquelle j'ai ajouté la constante $-b \times$ arc AB, afin que $\int \frac{badx}{\sqrt{2ax - xx}}$ fût $= 0$, lorsque x seroit $= b$; on aura donc $\int \frac{badx}{\sqrt{2ax - xx}} = -b \times$ arc BM.

Maintenant pour avoir l'intégrale de $\int \frac{-axdx}{\sqrt{2ax - xx}}$, je l'écris

ainsi $\int \frac{-axdx}{\sqrt{2ax-xx}} = \int \frac{aadx-axdx}{\sqrt{2ax-xx}}$ $- \int \frac{aadx}{\sqrt{2ax-xx}}$, dont l'intégrale est $a\sqrt{2ax-xx} - a \times AM$ $= a \times (MP - AM)$, à laquelle il faut ajouter la constante $-a(BN - AB)$; pour la raison que nous avons dite ci-dessus, on aura donc $\int \frac{-axdx}{\sqrt{2ax-xx}}$ $= -a \times (BO - BM)$.

Donc $vv = 2pb - 2px - \frac{2f \times 2pb \times BM}{gg} - 2f \times 2pa \times (BO - BM)$.

COROLLAIRE I.

Donc lorsque le Pendule est arrivé

arrivé en A, on a $vv = 2pb - \frac{2f \times 2pb \times BA}{gg} - \frac{2f \times 2pa \times (BN - BA)}{gg}$.

COROLLAIRE II.

Donc (*Fig.* 3.) si l'on fait $An = b - \frac{2fb \times BA}{gg} - \frac{2fa \times (BN - BA)}{gg}$, on aura $vv = 2p \times An$. C'eſt-à-dire, que la vîteſſe au point A ſeroit la même que celle que le Pendule auroit acquiſe en tombant dans le vide du point b juſqu'en A.

COROLLAIRE III.

Si l'arc AB ne contient que peu de degrés, BN ſera preſque

égale à BA, & l'on pourra supposer $vv = 2pb - \frac{2f.2pb.BA}{gg}$.

PROPOSITION II.

PROBLÊME.

Supposons (Fig. 4.) *qu'un Pendule* A, *placé dans la situation verticale* G A, *reçoive une impulsion ou vîtesse* h *suivant l'horizontale* A R. *On demande sa vîtesse en un point quelconque* M.

SOLUTION.

Les mêmes noms étant supposés que ci-dessus, la force retardatrice sera ici $\frac{p\sqrt{2ax-xx}}{a}$

$+ \frac{fvv}{gg}$; parce que la résistance s'ajoute à la pesanteur pour diminuer continuellement la vîtesse du Pendule, & on aura

$$- du = \frac{adx}{v\sqrt{2ax - xx}} \times \left(\frac{p\sqrt{2ax - xx}}{a} + \frac{fvv}{gg}\right).$$

Je mets $-du$, parce que x croissant: v diminue: donc $-vdv = pdx + \frac{fvv \times adx}{gg\sqrt{2ax - xx}}$, & ajoutant les constantes, $\frac{hh - vv}{2} = px + \int \frac{fvv \times adx}{gg\sqrt{2ax - xx}}$. Donc si $f = 0$, on aura $vv = hh - 2px$; or l'on pourra, comme dans le Problême précédent, mettre au lieu de vv sa

valeur approchée $hh - 2px$, dans le terme $\int \frac{fvvadx}{gg\sqrt{\times 2ax - xx}}$. Ce qui donnera $vv = hh - 2px - 2\int \frac{fhhadx}{gg\sqrt{2ax - xx}} + 2\int \frac{f \times 2paxdx}{gg\sqrt{2ax - xx}} = hh - 2px - \frac{2fhh}{gg} \times AM + \frac{2f \times 2pa}{gg} \times (+AM - MP.)$

Soit AN la hauteur à laquelle le Pendule auroit remonté dans le vide ; on aura $hh = 2p \times AN$, & $vv = 2p \times PN - \frac{2f \times 2p \times AN \times AM}{gg} + \frac{2f \times 2pa}{gg} \times (-MP + AM.)$

COROLLAIRE I.

Donc (*Fig.* 5.) lorſque le corps eſt arrivé au point c, tel que $Nn = \frac{2f \times AN \times Ac}{gg} + \frac{2f \times a \times (nc - Ac)}{gg}$; la vîteſſe v ſera $= 0$.

COROLLAIRE II.

Comme nc & Ac different très-peu de NC & de AC; il s'enſuit que pour trouver le point c où le corps s'arrête, ou la hauteur n à laquelle il remonte, il faut prendre $Nn = \frac{2f \times AN \times AC}{gg} + \frac{2fa \times (NC - AC)}{gg}$.

COROLLAIRE III.

Si l'arc *AC* ne contient que peu de degrés, *AC* sera presque égale à *AN*, & l'on aura à peu près $Nn = \frac{2f \times AN \times AC}{gg}$.

COROLLAIRE IV.

Si un Pendule (*Fig.* 6.) descend du point *B*, sa vîtesse en *A* que je nomme *h* sera égale, Corol. 2. Prop. 1. à celle qu'il auroit acquise en tombant dans le vide de la hauteur $An = b - \frac{2fb \times BA}{gg} - \frac{2fa \times (BN - BA)}{gg}$, & il remontera jusqu'à la hauteur Av (Corol. 2. Prop. 2.)

$= An - \frac{2f \times An \times Ac}{gg} + \frac{2fa \times (nc - Ac)}{gg}$. Et comme nc & Ac different peu de BN & de BA, on aura $Av = b - \frac{4fb \times BA}{gg} + \frac{4fa \times (BN - BA)}{gg}$.

COROLLAIRE V.

Donc ſi l'arc BA contient peu de degrés, on aura $Av = b - \frac{4fb \times BA}{gg} = AN \times \frac{(1 - 4f \times BA)}{gg}$. Or dans cette même ſuppoſition, les arcs AC, Ak, ſont entre eux, à très-peu près, comme les racines des abſciſſes AN, Av. Car dans le cercle, les cordes ſont entr'elles comme les racines

des abscisses ; or les arcs peuvent être pris ici pour les cordes. Donc $Ck = \frac{AC \times (\sqrt{AN} - \sqrt{Av})}{\sqrt{AN}}$. Or $\sqrt{An} = \sqrt{AN\frac{(1 - 4f \times BA)}{gg}}$ $= \sqrt{AN} \times \sqrt{1 - \frac{4f \times BA}{gg}}$, & comme $\frac{4f.BA}{gg}$ est fort petite par rapport à 1, on peut au lieu de $\sqrt{1 - \frac{4f \times BA}{gg}}$, mettre $1 - \frac{2f \times BA}{gg}$ qui lui est à peu près égale. Car on sait que $\sqrt{1 - \alpha}$, α étant une très-petite fraction, est $1 - \frac{\alpha}{2}$ à très-peu près. Donc $Ck = AC$

$\times \frac{2fBA}{gg} = \frac{2fAB^2}{gg}$. Donc la différence *Ck* entre l'arc descendu *AB* & l'arc remonté *Ak* est comme le quarré de l'arc *AB*.

COROLLAIRE VI.

Donc (*Fig. 7.*) si on a l'arc *BAC* qu'un Pendule décrit dans l'air en tombant du point *B*, on aura facilement l'arc *bAk* qu'il doit décrire en tombant du point *b*. Car il ne faut que trouver *Ak* qu'on aura en faisant $BA - AC . bA - Ak :: BA^2 . bA^2$.

COROLLAIRE VII.

Donc (*Fig.* 6.) ſi un Pendule décrit l'arc BA dans l'air, on aura ſa vîteſſe au point A, en diviſant la ligne $N\nu$ en deux parties égales au point n. Car cette vîteſſe, Corol. 3. Prop. 1. eſt à très-peu près égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant dans le vide de la hauteur $b - \frac{2f \times B \cdot A}{gg} = b - \frac{N\nu}{2}$.

COROLLAIRE VIII.

On a $AC^2 . Ac^2 :: AN . An$. C'eſt-à-dire, $AC^2 . AC^2 - 2Cc \times AC :: AN . AN - Nn$.

Donc $Nn = \frac{2Cc \times AC \times AN}{AC^2}$

$= \frac{2Cc \times AN}{AC}$.

Par le même raiſonnement on aura $Nv = \frac{2Ck \times AN}{AC}$. Donc $Ck . Cc :: Nv . Nn$. Donc c eſt le point de milieu de l'arc Ck. Donc au lieu de diviſer Nv en deux parties égales, on pourra diviſer Ck en deux parties égales pour avoir l'arc Ac que le corps A en remontant auroit parcouru dans le vide.

COROLLAIRE IX.

Si le Pendule A eſt un petit globe, la réſiſtance f, toutes

choses d'ailleurs égales, est en raison inverse du diametre de ce globe & de sa densité ; car la résistance de l'air à deux globes de différens diametres est comme la surface ou le quarré des diametres ; & cette résistance doit être divisée par la masse, laquelle est comme la densité multipliée par le cube du diametre. Donc l'arc Ck, toutes choses d'ailleurs égales, est comme AB^2 divisé par le produit du diametre du globe & de sa densité.

C'est à vous, M***, à voir maintenant l'usage qu'on peut faire de ces propositions, lorsf-

qu'on veut avoir égard à l'altération du mouvement que cause la résistance de l'air, dans les expériences par lesquelles on cherche avec des Pendules les lois du choc des corps. Vous appercevrez sans peine que les Corollaires 6, 7, 8, donneront les vîtesses que les deux Pendules ont ou reçoivent au point le plus bas où ils sont supposés se choquer.

M. Newton qui, comme vous savez, n'a pas cru devoir négliger cette résistance, lorsqu'il a parlé des lois du choc des corps, dans le premier Livre de ses Principes, paroît avoir fait *Ck*

proportionnelle, non au quarré de l'arc parcouru, comme nous l'avons trouvé, & comme peut-être vous le ſuppoſiez, lorſque cet endroit de ſon ouvrage vous a arrêté ; mais à l'arc ſeulement : c'eſt ce qu'il me reſte à vous démontrer. Pour cet effet, je tranſcrirai ſon texte, & j'y ajouterai les éclairciſſemens que je trouve dans les papiers que les RR. PP. Jacquier & le Sueur ont condamnés à l'oubli, en prévenant par leur excellent Commentaire celui que je méditois.

Texte de Newton.

« Soient, dit Newton, Princip.
» Mathématiq. pag. 50, voyez
» la figure 8 (*), les corps

(*) *Pendeant corpora sphærica* A, B, *filis parallelis & æqualibus* AC, BD, *à centris* C, D. *His centris & intervallis describantur semicirculi* EAF, GBH, *radiis* CA, DB *bisecti. Trahatur corpus* A *ad arcûs* EAF *punctum quodvis* R, *& subducto corpore* B, *demittatur indè, redeatque post unam oscillationem, ad punctum* V. *Est* RV *retardatio & resistentia aëris. Hujus* RV *fiat* ST. *pars quarta sita in medio, ita scilicet ut* RS, *&* TV *æquentur, sitque* RS, *ad* ST *ut* 3 *ad* 2. *& ista* ST *exhibebit retardationem in descensu ab* S *ad* A *quàm proximè. Restituatur corpus* B *in locum suum. Cadat corpus*

» sphériques *A*, *B* suspendus des
» points *C*, *D*, par fils paral-
» leles & égaux *AC*, *BD*.

A *de puncto* S, *& velocitas ejus in loco reflexionis* A *sine errore sensibili tanta erit, ac si in vacuo cecidisset de loco* T. *Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcûs* T A; *nam velocitatem penduli in puncto infimo esse ut chordam arcûs, quem cadendo descripsit, propositio est Geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus* A *ad locum* s, *& corpus* B *ad locum* K. *Tollatur corpus* B *& inveniatur locus* u; *à quo si corpus* A *demittatur, & post unam oscillationem redeat ad locum* r, *sit* s t *pars quarta ipsius* r v *sita in medio, ita videlicet ut* r s *&* t u *æquentur; & per chordam arcûs* t A *exponatur velocitas, quam corpus* A *proximè post reflexionem habuit in loco* A. *Nam* t *erit locus ille verus & correctus,*

De ces points & de la longueur
» des fils soient décrites les
» dêmi-circonférences *E A F*,

ad quem corpus A, *sublatâ aëris resistentiâ, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus* K, *ad quem corpus* B *ascendit, & inveniendus locus* I, *ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus* A, *ut ita dicam, in chordam arcûs* T A, *quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco* A *proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcûs* t A, *ut habeatur motus ejus in loco* A *proximè post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, invenienda sunt motus utriusque tam ante quàm post reflexionem; & tum demùm conferendi sunt motus inter se,*

» *G B H* divisées en deux par-
» ties égales par les rayons *C A*,
» *C B*. Faites remonter le corps
» *A* à quelque point *R* de l'arc
» *E A F*. Otez le corps *B*, &
» laissez retomber le corps *A*;
» s'il remonte après une oscilla-
» tion au point *V*, *R V* expri-

& colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quàm æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo, vel duodecim, vel sexdecim, concurrerent; reperi semper, sine errore trium digitorum in mensuris; ubi corpora sibi mutuò occurrebant, æquales esse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem & reactionem semper esse æquales, &c.

» mera la retardation causée par
» la résistance de l'air. Prenez
» *S T* égale à la quatrieme par-
» tie de *R V*; placez-la dans le
» milieu; de sorte que *R S* soit
» égale à *T V*, & que *R S* soit
» à *S T* comme 3 à 2, *R S*
» exprimera à peu près la retar-
» dation après la descente de *S*
» en *A*. Remettez à sa place le
» corps que vous aurez ôté.
» Laissez tomber le corps *A* du
» point *S*. Sa vîtesse au point
» de réflexion *A* sera sans erreur
» sensible la même que s'il étoit
» descendu dans le vide du point
» *T*. Soit donc cette vîtesse ex-
» primée par la corde *T A*; car
» tous les Géometres savent que

» la vîtesse d'un Pendule au point
» le plus bas de l'arc qu'il décrit,
» est comme la corde de cet
» arc. Si le corps *A* remonte
» après le choc au point *S*, &
» le corps *B* au point *K*, ôtez
» le corps *B* & trouvez le point
» *u*, d'où laissant tomber le corps
» *A*, il remonte après une os-
» cillation au point *r*, tel que *s t*
» soit la quatrieme partie de *r u*,
» & *s r* égale à *t u*. La corde
» *t A* exprimera la vîtesse que le
» corps *A* avoit en *A*, après sa
» réflexion ; car *t* est le lieu vrai
» & corrigé, auquel le corps *A*
» seroit remonté sans la résis-
» tance de l'air. Il faudra corri-
» ger de la même façon le lieu *K*,

» auquel le corps *B* eſt remonté,
» & trouver le point *l* qu'il eût
» atteint dans le vide. C'eſt ainſi
» qu'on fera les expériences,
» comme dans le vide. Enfin il
» faudra, pour ainſi dire, mul-
» tiplier le corps *A* par la corde
» *TA*, qui exprime ſa vîteſſe,
» pour avoir ſon mouvement au
» point *A*, immédiatement avant
» le choc, & par la corde *tA*,
» pour avoir ſon mouvement,
» après le choc. Il faut chercher
» par la même méthode les quan-
» tités de mouvement qu'ont
» avant & après le choc, deux
» corps qu'on a laiſſé tomber en
» même temps de deux points
» différens, & trouver par la

» comparaison de ces mouve-
» mens les effets du choc. C'est
» ainsi qu'en faisant mes expé-
» riences sur des Pendules de dix
» pieds de long, tant avec des
» corps égaux qu'avec des corps
» inégaux, que je laissois tom-
» ber de fort loin, de la dis-
» tance, par exemple, de 8, 12,
» 16 pieds, j'ai trouvé, sans
» avoir erré dans mes mesures
» de la quantité de trois doigts,
» que les changemens que le
» choc direct fait en sens con-
» traires, aux mouvemens des
» corps, étoient égaux; & par
» conséquent que l'action étoit
» toujours égale à la réac-
» tion, &c. » . . . . . .

ÉCLAIRCISSEMENS.

Voilà le texte de Newton, & voici maintenant les éclairciſſemens que je me ſuis engagé de vous donner. Si un corps tombe de *R* en *A*, Fig. 9, dans un milieu non réſiſtant, ſa vîteſſe eſt, comme on ſait, égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant d'une hauteur égale à celle de *RA*. Mais comme le milieu réſiſte ici, on peut ſuppoſer la vîteſſe du corps en *A*, égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant dans un milieu non réſiſtant par un arc $rA < RA$.

Arrivé en *A*, ſi le milieu ne réſiſtoit point dans la branche

A M, le corps remonteroit par un arc $A\rho = Ar$; mais la résistance du milieu fait qu'il ne remonte que jusqu'en *N*; de *N* il descend en *A*, où l'on suppose qu'il ait une vîtesse égale à celle qu'il eût acquise en tombant par un arc $nA < NA$ dans un milieu non résistant; & au lieu de remonter par l'arc $Ay = An$, la résistance du milieu ne lui permet de remonter qu'en *V*.

Cela posé, l'arc *R V* exprime les retardations produites par la résistance du milieu dans toutes les oscillations dont je viens de parler. Mais ces oscillations étant toutes plus petites les unes

que

que les autres, pour avoir la retardation de chacune d'elles en particulier, il faudroit partager inégalement l'arc RV; & comme ces oscillations sont au nombre de quatre, la retardation pour la premiere oscillation est plus grande que la quatrieme partie de RV; & cette quatrieme partie, trop grande pour la retardation de la quatrieme oscillation. Mais il est un point S d'où le corps tombant jusqu'en A, la quatrieme partie de RV exprimera exactement la retardation pour l'arc SA.

Cherchons ce point S. Pour le trouver soit $RA = 1$; $RV = 4b$; $SA = x$, en supposant

les retardations proportionnelles aux arcs parcourus, on aura Rr retardation de l'arc parcouru $RA = \frac{b}{x}$; & $A\rho$ second arc $= Ar = RA - Rr = 1 - \frac{b}{x}$; de même ρN retardation de l'arc $A\rho = (1 - \frac{b}{x}) \times \frac{b}{x} = \frac{b}{x} - \frac{bb}{xx}$. Donc AN 3^e arc $= A\rho - \rho N = 1 - \frac{2b}{x} + \frac{bb}{xx}$; & la retardation Nn de l'arc $AN = (1 - \frac{2b}{x} + \frac{bb}{xx}) \times \frac{b}{x} = \frac{b}{x} - \frac{2bb}{xx} + \frac{b^3}{x^3}$. Donc $Ay = An = AN - Nn$ quatrieme arc $= 1 - \frac{3b}{x} + \frac{3bb}{xx} - \frac{b^3}{x^3}$.

Donc Vy retardation du quatrieme arc $= \frac{b}{x} - \frac{3bb}{xx} + \frac{3b^3}{x^3} - \frac{b^4}{x^4}$.

On a donc Rr, retardation du premier arc $= \frac{b}{x}$.

ρN, retardation du ſecond $= \frac{b}{x} - \frac{bb}{xx}$.

Nn retardement du troiſieme $= \frac{b}{x} - \frac{2bb}{xx} + \frac{b^3}{x^3}$.

Vy, retardation du quatrieme $= \frac{b}{x} - \frac{3bb}{xx} + \frac{3b^3}{x^3} - \frac{b^4}{x^4}$.

Et à cauſe que $Rr + \rho N + Nn + Vy = VR = 4b$, on a $\frac{4b}{x} - \frac{6bb}{xx} + \frac{4b^3}{x^3} - \frac{b^4}{x^4}$

près autant qu'on lui avoit ôté ; d'où il suit que cette approximation est aussi simple & aussi exacte qu'on le puisse désirer, dans la supposition que les retardations sont comme les arcs & non comme les quarrés des arcs.

2°. Que les retardations $\frac{b}{x}$, $\frac{b}{x} - \frac{bb}{xx}$, &c. sont en progression géométrique.

3°. Que pour résoudre exactement l'équation $\frac{4b}{x} - \frac{6bb}{xx} + \frac{4b^3}{x^3} - \frac{b^4}{x^4} = 4b$, on eût fait $1 - \frac{4b}{x} + \frac{6bb}{xx} - \frac{4b^3}{x^3} + \frac{b^4}{x^4} =$

$1 - 4b$. Donc $1 - \frac{b}{x} = \sqrt[4]{1-4b}$ ou $x = \frac{b}{1 - \sqrt[4]{1-4b}}$.

4°. Que pour trouver le lieu *V*, on a $st.tu :: 2.3$, & que $tu = sr$. D'où il s'ensuit que $su. sr :: 5.3$. Soit donc $As = 1$, $sr = x$, on a $Au = 1 + \frac{5x}{4}$, $Ar = 1 - x$. Or *Au* est à *Ar* à peu près comme *AV*. *AR*. Donc si l'on fait $AV. AR :: m.n$, on aura $m.n :: 1 + \frac{5x}{3}, 1 - x$. Donc $n + \frac{5xn}{3} = m - mx$. Donc $x = \frac{m-n}{m + \frac{5n}{3}} =$

$\frac{3 \times \overline{m-n}}{3m+5n} \times As$, parce qu'on a supposé $As = 1$.

On peut encore chercher ce point V par expérience, en laissant tomber le Pendule d'un point V jusqu'à ce qu'il revienne en un point r, dont la distance sr au point s soit $= su \times \frac{3}{5}$, ou enfin on peut prendre simplement $st = \frac{As}{AS} \times ST$.

Voilà, ce me semble, tout l'endroit de Newton sur les retardations du Pendule causées par la résistance de l'air, assez bien défriché. D'où il paroît s'ensuivre que cet Auteur suppose les retardations comme les arcs,

au lieu que nous les trouvons par les propositions précédentes, comme les quarrés des arcs.

Vous m'objecterez sans doute que Newton a l'expérience pour lui ; & que c'est d'après cette hypothese (*) qu'il a trouvé que l'action est toujours égale à la réaction ; & que si, par exemple le corps *A*, après avoir choqué le corps *B* en repos avec 9

(*) *Ut si corpus* A *incidebat in corpus* B *quiescens cum novem partibus motûs, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus* B *resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant,* A *cum duodecim partibus &* B *cum sex, & redibat* A *cum duabus; redibat* B *cum octo, factâ, &c.*

degrés de mouvement, continuoit d'aller avec deux, le corps *B* partoit avec sept degrés; que si les corps se choquoient en sens contraires, *A* avec 12 degrés de mouvement, & *B* avec 6, & que *A* se réfléchit avec 2, *B* se réfléchissoit avec 8, &c.

Je vous répondrai que, quoiqu'on ne se soit jamais avisé de douter ni de l'exactitude, ni de la bonne foi de Newton, cela n'a pas empêché qu'on n'ait réitéré ses Expériences sur les couleurs. Pourquoi n'en feroit-on pas autant dans cette occasion-ci, où cet Auteur est parti d'une hypothese que le calcul contredit évidemment, & où il étoit

d'autant plus facile de ſe tromper, que les vîteſſes ſont repréſentées par des quantités dont les différences ſont très-petites, ſavoir les cordes des arcs parcourus devant & après les retardations.

Si vous trouvez que ce ne ſoit pas aſſez accorder au grand nom de Newton, j'en ſuis fâché ; pour moi, je ne puis lui accorder davantage : j'ai pour Newton toute la déférence qu'on doit aux hommes uniques dans leur genre ; j'incline fort à croire qu'il a la vérité de ſon côté ; mais encore eſt-il bon de s'en aſſurer. J'invite donc tous les amateurs de la bonne Phyſique

à recommencer ses Expériences, & à nous apprendre si les retardations sont telles que Newton paroît les avoir supposées, proportionnelles aux arcs parcourus, ou telles que le calcul nous les donne, proportionnelles aux quarrés de ces arcs.

CONCLUSION
Des cinq Mémoires.

Premiere Expérience. Graduer un tuyau composé de deux parties mobiles, & tenter par ce moyen la fixation du son.

Seconde Expérience. Construire un compas du cercle & de sa développante, & essayer

ſi par ce moyen on n'obtiendra pas la diviſion des arcs de cercles en parties commenſurables ou incommenſurables & d'autres opérations, & plus facilement & plus exactement que par toute autre voie.

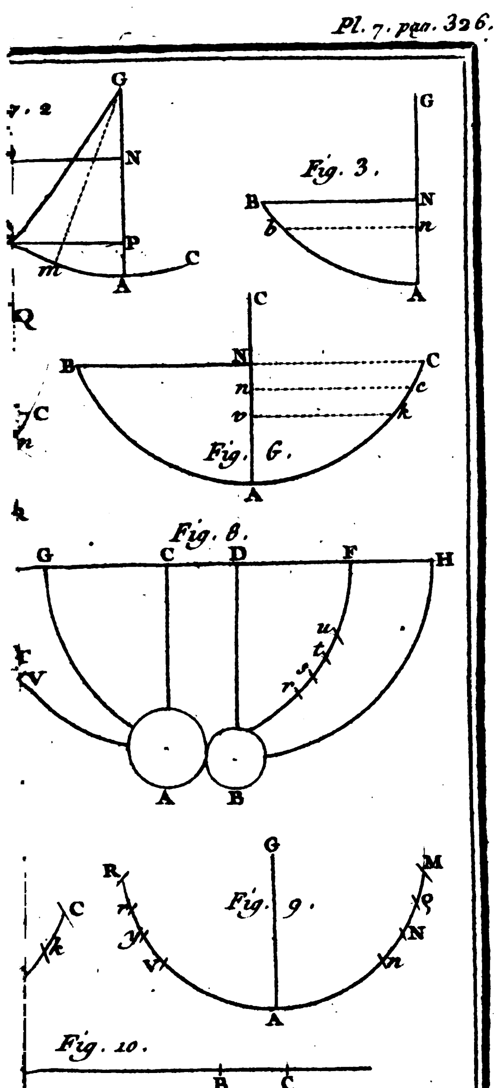
Troiſieme Expérience. Déterminer par le ſon, ſi une corde attachée par une de ſes extrémités à un point fixe, & tirée de l'autre par un poids, eſt auſſi tendue que ſi elle étoit tirée à ſes deux extrémités par deux poids égaux.

Quatrieme Expérience. Conſtruire un Harmonometre, ou un Orgue ſur lequel on puiſſe jouer, ou même compoſer toutes

Pieces de Musique, & éprouver à chaque instant son harmonie.

Cinquieme Expérience. S'assurer si les retardations que l'air fait au mouvement des Pendules, sont comme les arcs ou comme les quarrés des arcs, & recommencer les Expériences de Newton sur le choc des corps.

FIN.



G
N
P
C
m
A
Q
G
Fig. 3.
B
N
b
n
A
C
B
N
C
n
c
v
k
C
n
Fig. 6.
A
Fig. 8.
G
C
D
F
H
u
t
s
r
V
A
B
G
R
M
r
Fig. 9.
y
N
V
n
C
k
A
Fig. 10.
B
C



TABLE

DES MATIERES.

PREMIER MÉMOIRE.

SECOND MÉMOIRE.

TROISIEME MÉMOIRE.

QUATRIEME MÉMOIRE.

CINQUIEME MÉMOIRE.

Fin de la Table des Matieres.



